

Álgebra Lineal 2 - Taller 4

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

Para cada una de los siguientes operadores:

i) $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3)$ donde

$$f(x, y, z) = (4x, 3x + y - 3z, 3x - 3y + z),$$

ii) $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3)$ donde

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(5x - y + z, 5x - y - 3z, 4x - 4y)$$

en la base canónica \mathcal{C} ,

iii) $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ donde

$$f(x, y, z, w) = \frac{1}{3}(11x - y - z + 2w, 14x + 2y - 7z - 4w, 13x - 5y + z - 5w, 13x - 8y - 5z + 4w)$$

1. Encuentre la representación matricial de f en la base canónica.
2. Encuentre la factorización del polinomio característico $P_f(t)$ como producto de potencias de polinomios irreducibles de $\mathbb{Q}[t]$:

$$P_f(t) = P_1(t)^{r_1} P_2(t)^{r_2}$$

donde cada $P_i(t) \in \mathbb{Q}[t]$ es irreducible.

3. Sean $V_i = \ker(P_i(f)^{r_i})$, $i = 1, 2$, y p_1, p_2 las proyecciones sobre V_1, V_2 respecto a la descomposición $V = V_1 \oplus V_2$. Encuentre polinomios $\Pi_1(t), \Pi_2(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tales que $\Pi_i(f) = p_i$, $i = 1, 2$.

Ejemplo

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular su polinomio característico en la variable t y su factorización ejecutamos:

```
sage: t=PolynomialRing(RationalField(), 't').gen()
sage: A=Matrix(QQ, [[2,1,-1],[0,2,0],[0,1,1]])
sage: P=A.charpoly('t')
sage: factor(P)
```

Vemos que $P_A(t) = (t - 1)(t - 2)^2$. Tenemos dos subespacios invariantes $V_1 = \ker(A - I_3)$ y $V_2 = \ker((A - 2I_3)^2)$. Para obtener los polinomios $\Pi_1(t), \Pi_2(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tales que, para $i = 1, 2$, $\Pi_i(A)$ sea la proyección sobre V_i , ejecutamos

```
sage: P1=(t - 1)
sage: P2=(t - 2)^2
sage: P12,Q1,Q2=xgcd(P1,P2)
sage: Pi1=Q2*P2
sage: Pi2=Q1*P1
```

Las dos matrices de proyección $\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$, las calculamos ejecutando:

```
sage: Pr1=Pi1(A)
sage: Pr2=Pi2(A)
```

Para verificar que obtenemos dos matrices de proyecciones con las características deseadas ejecutamos:

```
sage: Pr1^2-Pr1
sage: Pr2^2-Pr2
sage: Pr1+Pr2
```