

# Álgebra Lineal 2 - Taller 4

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

Para cada una de los siguientes operadores:

i)  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3)$  donde

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 2z, -y, -2y + z),$$

ii)  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3)$  donde

$$f(x, y, z) = (6x - 2y - 6z, 4x - 6z, 4x - 2y - 4z)$$

en la base canónica  $\mathcal{C}$ ,

iii)  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$  donde

$$f(x, y, z, w) = (-2x - y + z, -x - 2y + z, -x - y, x - z - 2w)$$

1. Encuentre la representación matricial de  $f$  en la base canónica.
2. Encuentre la factorización del polinomio característico  $P_f(t)$  como producto de potencias de polinomios irreducibles de  $\mathbb{Q}[t]$ :

$$P_f(t) = P_1(t)^{r_1} P_2(t)^{r_2}$$

donde cada  $P_i(t) \in \mathbb{Q}[t]$  es irreducible.

3. Sean  $V_i = \ker(P_i(f)^{r_i})$ ,  $i = 1, 2$ , y  $p_1, p_2$  las proyecciones sobre  $V_1, V_2$  respecto a la descomposición  $V = V_1 \oplus V_2$ . Encuentre polinomios  $\Pi_1(t), \Pi_2(t) \in \mathbb{Q}[t]$  tales que  $\Pi_i(f) = p_i$ ,  $i = 1, 2$ .

## Ejemplo

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular su polinomio característico en la variable  $t$  y su factorización ejecutamos:

```
sage: t=PolynomialRing(RationalField(), 't').gen()
sage: A=Matrix(QQ, [[2,1,-1],[0,2,0],[0,1,1]])
sage: P=A.charpoly('t')
sage: factor(P)
```

Vemos que  $P_A(t) = (t-1)(t-2)^2$ . Tenemos dos subespacios invariantes  $V_1 = \ker(A - I_3)$  y  $V_2 = \ker(A - 2I_3)$ . Para obtener los polinomios  $\Pi_1(t), \Pi_2(t) \in \mathbb{Q}[t]$  tales que, para  $i = 1, 2$ ,  $\Pi_i(A)$  sea la proyección sobre  $V_i$ , ejecutamos

```
sage: P1=(t - 1)
sage: P2=(t - 2)^2
sage: P12,Q1,Q2=xgcd(P1,P2)
sage: Pi1=Q2*P2
sage: Pi2=Q1*P1
```

Las dos matrices de proyección  $\Pi_i(A)$ ,  $i = 1, 2$ , las calculamos ejecutando:

```
sage: Pr1=Pi1(A)
sage: Pr2=Pi2(A)
```

Para verificar que obtenemos dos matrices de proyecciones con las características deseadas ejecutamos:

```
sage: Pr1^2-Pr1
sage: Pr2^2-Pr2
sage: Pr1+Pr2
```