Taller

MATE 1107

1. Considere $\mathbb{C}^4$ con el producto hermítico definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \rangle = x_1\overline{x_2} + y_1\overline{y_2} + z_1\overline{z_2} + w_1\overline{w_2}.$$

Sea f el operador de $\mathbb{C}^4$ definido por

$$f(x, y, z, w) = \frac{1}{4}(3x+iy+z+iw, -ix+3y+iz-w, x-iy+3z-iw, -ix-y+iz+3w).$$

   (a) Demuestre que f es una proyección ortogonal sobre un subespacio V_1 de $\mathbb{C}^4$.

   (b) Encuentre una base ortonormal de V_1 y del complemento ortogonal de V_1.

2. Considere $\mathbb{C}^3$ con el producto hermítico definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1\overline{x_2} + y_1\overline{y_2} + z_1\overline{z_2}.$$

Sea f el operador de $\mathbb{C}^3$ definido por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{6}(13x + 10iy - 5iz, -10ix - 2y + 10z, 5ix + 10y + 13z).$$

   (a) Encuentre una base ortonormal formada por vectores propios de f y la representación matricial de f respecto a esta base.

   (b) Escriba f como combinación lineal de proyecciones ortogonales sobre subespacios dos a dos ortogonales.

3. Considere $\mathbb{R}^4$ con el producto interno definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + w_1w_2.$$

Sea f el operador de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$f(x, y, z, w) = (y - 3z, -x - w, 3x + 2w, y - 2z).$$

Verifique que

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v, w) & \longmapsto & \langle v, f(w) \rangle \end{array}$$

es un producto simpléctico y encuentre una base de Darboux de $\mathbb{R}^4$ para σ.