Álgebra Lineal 2 - Taller

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

Para cada uno de los siguientes operadores $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$, $V = K^d$:

i) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3)$ donde

$$f(x, y, z) = (2x - y + z, -2x + y + 2z, \frac{7}{3}x - \frac{5}{3}y + 2z)$$

ii) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ donde

$$f(x, y, z, w) = (5x - 2y + z - 2w, 3x - y + 2z - w, -x + 2z + w, 3x - y - w)$$

iii) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ donde

$$f(x, y, z, w) = (4x - y - 2w, x + y - w, -2x + y + z + w, 3x - y - w)$$

iv) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^4)$ donde

$$f(x, y, z, w) = (z + w, y + w, -y + 2z - w, -2x + y + 2z + w)$$

1. Encuentre la representación matricial de f en la base canónica.
2. Encuentre la factorización del polinomio característico $P_f(t)$ como producto de potencias de polinomios irreducibles de $K[t]$:
$$P_f(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t)^{r_i}$$
donde cada $P_i(t) \in \mathbb{K}[t]$ es irreducible.
3. Sean $V_i = \ker\left(P_i(f)^{r_i}\right)$, $i = 1, \ldots, n$, y $p_1, \ldots, p_n$ las proyecciones sobre $V_1, \ldots, V_n$ respecto a la descomposición $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$. Encuentre polinomios $\Pi_1(t), \ldots, \Pi_n(t) \in K[t]$ tales que $\Pi_i(f) = p_i$, $i = 1, \ldots, n$.
4. Encuentre polinomios $P_D(t), P_N(t) \in K[t]$ tales que $f_D = P_D(f)$ es diagonalizable, $f_N = P_n(f)$ es nilpotente y $f = f_D + f_N$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de f.
5. Encuentre una base de Jordan de V para f.