Taller 2
MATE 1107

Sean K un cuerpo de característica diferente de 2 (e.d. $1+1 \neq 0$) y (V,σ) un espacio simpléctico sobre K de dimensión finita. Denote $2n = \dim(V)$, $n > 0$. Sea f un operador en V auto-adjunto (e.d. $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$, y $\sigma(v, f(w)) = \sigma(f(v), w)$ para todo $v, w \in V$).

- Sea $U \leq V$. Demuestre que U es un subespacio simpléctico de V si y solo si $U \cap U^\sigma = \{0\}$.
- Sea $P(t) \in K$. Demuestre que $P(f)$ es auto-adjunto. (*Sugerencia*: demuestre primero que una combinacin lineal de operadores auto-adjuntos es auto-adjunto y que una potencia de un operador auto-adjunto es autoadjunto.)
- Suponga que f es una proyección. Demuestre que $U = f(V)$ es un subespacio simpléctico.
- Suponga que

  $$P_f(t) = \prod_{i=1}^{r} (t - \lambda_i)^{m_i} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K;$$

  y, para $i = 1, \ldots, r$ defina

  $$V_i = \ker\left((f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i}\right).$$

  Demuestre que para $i = 1, \ldots, r$, $V_i \leq V$ es subespacio simpléctico.
- Suponga que f es nilpotente y sea $V_0 \leq V$ un subespacio cíclico bajo f. Sea $v \in V_0$ tal que $\{v, f(v), \ldots, f^{d-1}(v)\}$ es una base de V_0.
  1. Demuestre que V_0 es isotrópico.
  2. Sea $w \in V$ tal que $\sigma(w, f^{d-1}(v)) \neq 0$. Demuestre que para, $i = 1, \ldots, d$, $\sigma(f^{i-1}(w), f^{d-i}(v)) \neq 0$.
  3. Demuestre que si $w \in V$ es tal que $\sigma(w, f^{d-1}(v)) \neq 0$,

     $$U = \mathrm{Sp}(\{v, \ldots, f^{d-1}(v), fd - 1(w), \ldots, w\})$$

     es un subespacio simpléctico.
  4. Demuestre que si $w \in V$ es tal que $\sigma(w, f^{d-1}(v)) \neq 0$ y

     $$U = \mathrm{Sp}(\{v, \ldots, f^{d-1}(v), fd - 1(w), \ldots, w\})$$

     entonces existe una base de Darboux de U,

     $$T = \{v_1, \ldots, v_{d-1}, w_1, \ldots, w_{d-1}\}$$

tal que $v_i = f^{i-1}(v_1)$ y $w_i = f^{d-1-i}(w_d)$. Demuestre además que $f(w_1) = 0$. (*Sugerencia*: A partir de la base de U obtenida en el punto anterior, recursivamente, empiece con w tal que $\sigma(w, f^{d-1}(v)) = 1$, y defina $w' = w - af(w)$ tal que $\sigma(w', f^{d-2}(v)) = 0$, luego $w'' = w' - bf^2(w')$ tal que $\sigma(w'', f^{d-3}(v)) = 0$ y así sucesivamente hasta completar $d-1$ pasos y obtener el w_{d-1} buscado.)

- Demuestre que existe una base de Darboux T y una matriz $A \in M_{n\times n}(K)$ tal que
$$\Big[f\Big]_T^T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^\mathsf{T} \end{bmatrix}$$
.

- Sea $F \in M_{6\times 6}(K)$ la matriz
$$F = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Encuentre una matriz simpléctica $S \in M_{6\times 6}(K)$ y una matriz $A \in M_{3\times 3}(K)$ tales que
$$S^{-1}FS = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^\mathsf{T} \end{bmatrix}$$
.