Álgebra Lineal 2 - Taller

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

Para cada uno de los siguientes operadores $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$, $V = K^d$:

i) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3)$ donde

$$f(x,y,z) = (9x - 4z, 18x - y - 4z, \frac{15}{2}x - \frac{3}{2}y + z)$$

ii) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3)$ donde

$$f(x,y,z) = (2x - y + z, -2x + y + 2z, \frac{7}{3}x - \frac{5}{3}y + 2z)$$

iii) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ donde

$$f(x,y,z,w) = (x - y + w, -x - z + 2w, 2x - y - z - w, 2x - y)$$

iv) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ donde

$$f(x,y,z,w) = (x - y + w, -x - z + 2w, 2x - y - z - w, 2x - y)$$

v) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ donde

$$f(x,y,z,w) = (2x - 2y + 2z - 2w, -x + 2y + 2z, 5x - 6y + z - 5w, -x + 3z - w)$$

vi) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^4)$ donde

$$f(x,y,z,w) = (2x - 2y + 2z - 2w, -x + 2y + 2z, 5x - 6y + z - 5w, -x + 3z - w)$$

1. Encuentre la representación matricial de f en la base canónica.
2. Encuentre la factorización del polinomio característico $P_f(t)$ como producto de potencias de polinomios irreducibles de $K[t]$:
$$P_f(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t)^{r_i}$$
donde cada $P_i(t) \in \mathbb{K}[t]$ es irreducible.
3. Sean $V_i = \ker(P_i(f)^{r_i})$, $i = 1, \ldots, n$, y $p_1, \ldots, p_n$ las proyecciones sobre $V_1, \ldots, V_n$ respecto a la descomposición $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$. Encuentre polinomios $\Pi_1(t), \ldots, \Pi_n(t) \in K[t]$ tales que $\Pi_i(f) = p_i$, $i = 1, \ldots, n$.
4. Encuentre las representaciones matriciales de p_i y $f \circ p_i$, $i = 1, \ldots, n$, en la base canónica.
5. Encuentre una base de V respecto a la cual la representación matricial de f es diagonal por bloques de tamaño $\dim(V_i)$, $i = 1, \ldots, n$, y cada bloque corresponde a una representación matricial de $f\restriction_{V_i}$.