Álgebra Lineal 2 - Taller 11

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

1. Sea K un cuerpo y V un espacio vectorial sobre K de dimensión n. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\{\lambda^1, \ldots, \lambda^n\}$ la base dual.

   (a) Suponga que $n = 3$, describa una base de $T^{(0,2)}(V)$ y exprese

   $$\begin{array}{rcl} T : V \times V & \longrightarrow & K \\ (a^i v_i, b^i v_i) & \longmapsto & a^1 b^3 + a^2 b^1 + a^3 b^2 \end{array}$$

   como combinación lineal de elementos de esa base.

   (b) Suponga que $n = 2$.

   i. Sea $F \in T^{(1,1)}(V)$
   $$F = (3\lambda^1 - 4\lambda^2) \otimes v_1 + (4\lambda^1 + 3\lambda^2) \otimes v_2$$
   Encuentre un operador f de V tal que para todo $v \in V$, $f(v) = F(v)$, donde $F(v)$ es la contracción de F por v, este último visto como elemento en $T^{(1,0)}(V)$.

   ii. Sea f^* el operador dual del operador f del punto anterior. Encuentre $F^* \in T^{(1,1)}(V)$ tal que para todo $\lambda \in V^*$, $f^*(\lambda) = F^*(\lambda)$, donde $F^*(\lambda)$ es la contracción de F^* por λ, este último visto como elemento en $T^{(0,1)}(V)$.

2. Sea K un cuerpo y $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Sea $e_1, \ldots, e_n$ la base canónica de K^n y $(e^1, \ldots, e^n)$ la base dual. Sea $a_{ij} \in K$, para $i, j = 1, \ldots, n$ y $s \in T^{(0,2)}(K^n)$ definida por

   $$s(x^i e_i, y^i e_i) = a_{ij} x^i y^j.$$

   (a) Describa una base de $T^{(0,2)}(K^n)$ y exprese s como combinación lineal de elementos de esa base.

   (b) Sea

   $$\begin{array}{rcl} s^* : K^n & \longrightarrow & (K^n)^* \\ v & \longmapsto & \{s^*(v) : w \to s(v, w)\} \end{array}$$

   Encuentre $S \in T^{(0,2)}(K^n)$ tal que $s^*(v) = S(v)$, donde $S(v)$ es la contracción de S por v, este visto como elemento en $T^{(1,0)}(K^n)$.

   Notación En los puntos 3. y 4. vamos a denotar al tensor $S \in T^{(0,2)}(K^n)$ por s.

3. Sea (e_1, e_2, e_3) la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y (e^1, e^2, e^3) la base dual. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz

   $$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

   y $s \in T^{(0,2)}(\mathbb{R}^3)$ definida por
   $$s(x^i e_i, y^i e_i) = a_{ij} x^i y^j.$$

   (a) Encuentre los valores propios de A.

   (b) Demuestre que s define un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

   (c) Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A.

   (d) A partir de los vectores propios encontrado, encuentre una base (E_1, E_2, E_3) ortogonal respecto al producto interno s.

   (e) Sea (E^1, E^2, E^3) la base dual (E_1, E_2, E_3), escriba s como una combinación lineal de los elementos de la base $\{E^i \otimes E^j\}$.

4. Sea (e_1, e_2, e_3) la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y (e^1, e^2, e^3) la base dual. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

y $s \in T^{(0,2)}(\mathbb{R}^3)$ definida por

$$s(x^i e_i, y^i e_i) = a_{ij} x^i y^j.$$

(a) Encuentre los valores propios de A.

(b) Encuentre una base (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A.

(c) Sea (f^1, f^2, f^3) la base dual (f_1, f_2, f_3), escriba s como una combinación lineal de los elementos de la base $f^i \otimes f^j$.

(d) Encuentre una base (E^1, E^2, E^3) tal que si (E_1, E_2, E_3) es la base dual, entonces

$$s = E^1 \otimes E^1 + E^2 \otimes E^2 - E^3 \otimes E^3$$

.

Observación: Si quiere puede demostrar que si s es una forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{R}^n$ entonces exite una base $(E_1, \ldots, E_n)$ tal que

$$s = \sum_i \varepsilon_i E^i \otimes E^i$$

con $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ (ver "ley de inercia de Sylvester"). En tal caso $s(E_i) = \varepsilon E^i$. Cuando $\varepsilon_i = 1$ para todo i tenemos que s es un producto interno y se dice vulgarmente que s "sube los indices", pues $s(E_i) = E^i$.