Álgebra Lineal 2 - Taller 8

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

1. Considere $\mathbb{R}^4$ con el producto interno definido por
$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1); (x_2, y_2, z_2, w_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + w_1w_2.$$
   Sea f el operador de $\mathbb{R}^4$ definido por
$$f(x, y, z, w) = \frac{1}{4}(3x - y - z + w, -x + 3y - z + w, -x - y + 3z + w, x + y + z + 3w).$$
   (a) Demuestre que f es una proyección ortogonal sobre un subespacio V_1 de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Encuentre una base ortonormal de V_1 y del complemento ortogonal de V_1.
2. Considere $\mathbb{R}^3$ con el producto interno definido por
$$\langle (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$
   Sea f el operador de $\mathbb{R}^3$ definido por
$$f(x, y, z) = (-x - y - z, -x - y + z, -x + y - z).$$
   (a) Encuentre una base ortonormal formada por vectores propios de f y la representación matricial de f respecto a esta base.
   (b) Escriba f como combinación lineal de proyecciones ortogonales sobre subespacios dos a dos ortogonales.

Solución:

1. (a) La representación matricial de f en la base canónica es
$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$
   Como $\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right)^2 = [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ entonces $f^2 = f$, luego f es una proyección. Sea $U = \mathrm{im}(f)$. La representación matricial en la base canónica de la proyección sobre el núcleo de f, $U_0 = \ker(f)$ es:
$$[\mathrm{id}_V - f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   Las columnas son las coordenadas en la base canónica de generadores de los subespacios sobre los cuales se están proyectando. Ahora, como la base canónica es ortonormal entonces el producto interno entre los generadores de U y de U_0 es:
$$\left([\mathrm{id}_V - f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right)^{\intercal} [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$$
   además
$$\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right)^{\intercal} = [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$$
   luego $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ es simétrica, y $f^* = f$. Entonces
$$\left([\mathrm{id}_V - f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right)^* [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = [f - f^* \circ f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \left[f - f^2\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = [f - f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = 0$$
   luego estos subespacio son ortogonales entre si y así $U_0 = U^{\perp}$ y las proyecciones son ortogonales.
   Observación Note que para este punto sobra tener las representaciones matriciales. Lo suficiente acá es que f es una proyección auto-adjunta, y de ahí se sigue que $(\mathrm{id} - f)^* \circ f = 0$.

(b) Usamos Gram-Schmidt sobre los generadores de U y de U_0 y obtenemos las bases ortonormales:

$$\begin{aligned} U &= \langle \frac{1}{6}(3\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}), \frac{1}{6}(0, 2\sqrt{6}, -\sqrt{6}, \sqrt{6}), \frac{1}{2}(0, 0, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \rangle \\ U^{\perp} &= \langle \frac{1}{2}(1, 1, 1, -1) \rangle \end{aligned}$$

2. (a) La representación matricial en la base canónica de f es

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$ y generadores de los espacios propios son:

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \langle (-1, 1, 1) \rangle \\ V_{\lambda_2} &= \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle. \end{aligned}$$

Una base ortonormal para cada uno de estos espacios es

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \langle \frac{1}{3}(-\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}) \rangle \\ V_{\lambda_2} &= \langle \frac{1}{2}(i\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), \frac{1}{6}(\sqrt{6}, 2\sqrt{6}, -\sqrt{6}) \rangle. \end{aligned}$$

(b) Por el teorema espectral, como $\mathbb{R}^3 = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$ entonces $f = \lambda_1 \mathrm{p}^{\perp}_{V_{\lambda_1}} + \lambda_2 \mathrm{p}^{\perp}_{V_{\lambda_2}} = \mathrm{p}^{\perp}_{V_{\lambda_1}} - 2\mathrm{p}^{\perp}_{V_{\lambda_2}}$.