Álgebra Lineal 2 - Taller

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

Para cada uno de los siguientes operadores $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$, $V = K^d$:

i) Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3)$ dada por

$$f(x,y,z) = (2x - y + z, -2x + y + 2z, \frac{7}{3}x - \frac{5}{3}y + 2z)$$

1. Si $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{Q}^3$ entonces:

$$\left[f\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 7/3 & -5/3 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Tenemos $P_f(t) = P_1(t)^2 P_2(t)$ donde $P_1(t) = (t-1)$, $P_2(t) = (t-3)$
3. Sean $R_1(t) = P_2(t)$, $R_2(t) = P_1(t)^2$. Entonces

$$-\frac{1+t}{4} R_1(t) + \frac{1}{4} R_2(t) = 1$$

así si $\Pi_1(t) = -\frac{1+t}{4} R_1(t)$ y $\Pi_2(t) = \frac{1}{4} R_2(t)$, entonces, para $i = 1,2$, $p_i = \Pi_i(f)$ es la proyección sobre $V_i = \ker(P_i(f)^{r_i})$ de acuerdo a la descomposición

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

4. Si $P_D(t) = P_1(t) + 3P_2(t)$ y $P_N = t - P_D(t)$ entonces $f_D = P_D(f)$ es diagonalizable, $f_N = P_n(f)$ es nilpotente y $f = f_D + f_N$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de f.
5. Tenemos $V_1 = \langle (0,0,1), (1,2,0) \rangle$ y $V_2 = \langle (2,1,3) \rangle$ y $\dim\left(\ker(f - id_V)\right) = 1$. Entonces si $v_1 = (0,0,1)$ y $v_2 = (2,1,3)$, $\mathcal{B} = \{(f - id_V)(v_1), v_1, v_2\}$ es una base de Jordan para f.

ii) Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ dada por

$$f(x,y,z,w) = (5x - 2y + z - 2w, 3x - y + 2z - w, -x + 2z + w, 3x - y - w)$$

1. Si $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{Q}^4$ entonces:

$$\left[f\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Tenemos $P_f(t) = P_1(t)^3 P_2(t)$ donde $P_1(t) = (t-1)$, $P_2(t) = (t-2)$
3. Sean $R_1(t) = P_2(t)$, $R_2(t) = P_1(t)^3$. Entonces

$$(-t^2 + t - 1) R_1(t) + R_2(t) = 1$$

así si $\Pi_1(t) = (-t^2 + t - 1) R_1(t)$ y $\Pi_2(t) = R_2(t)$, entonces, para $i = 1,2$, $p_i = \Pi_i(f)$ es la proyección sobre $V_i = \ker(P_i(f)^{r_i})$ de acuerdo a la descomposición

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

4. Si $P_D(t) = P_1(t) + 2P_2(t)$ y $P_N = t - P_D(t)$ entonces $f_D = P_D(f)$ es diagonalizable, $f_N = P_n(f)$ es nilpotente y $f = f_D + f_N$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de f.
5. Tenemos $V_1 = \langle (1,0,0,2), (0,0,1,0), (1,2,0,0) \rangle$ y $V_2 = \langle (1,0,-1,1) \rangle$ y $\ker\left((f - id_V)^2\right) = \langle (1,1,0,1), (1,2,1,0) \rangle$, $\ker\left(f - id_V\right) = \langle (1,1,0,1) \rangle$. Entonces si $v_1 = (0,0,1,0)$ y $v_2 = (1,0,-1,1)$, $\mathcal{B} = \{(f - id_V)^2(v_1), (f - id_V)(v_1), v_1, v_2\}$ es una base de Jordan para f.

iii) Sea $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ dada por

$$f(x,y,z,w) = (4x - y - 2w, x + y - w, -2x + y + z + w, 3x - y - w)$$

1. Si $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{Q}^4$ entonces:

$$\big[f\big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Tenemos $P_f(t) = P_1(t)^3 P_2(t)$ donde $P_1(t) = (t-1)$, $P_2(t) = (t-2)$.
3. Sean $R_1(t) = P_2(t)$, $R_2(t) = P_1(t)^3$. Entonces

$$(-t^2 + t - 1)R_1(t) + R_2(t) = 1$$

así si $\Pi_1(t) = (-t^2 + t - 1)R_1(t)$ y $\Pi_2(t) = R_2(t)$, entonces, para $i = 1,2$, $p_i = \Pi_i(f)$ es la proyección sobre $V_i = \ker(P_i(f)^{r_i})$ de acuerdo a la descomposición

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

4. Si $P_D(t) = P_1(t) + 2P_2(t)$ y $P_N = t - P_D(t)$ entonces $f_D = P_D(f)$ es diagonalizable, $f_N = P_n(f)$ es nilpotente y $f = f_D + f_N$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de f.
5. Tenemos $V_1 = \langle (1,0,0,2), (0,0,1,0), (1,2,0,0) \rangle$ y $V_2 = \langle (1,0,-1,1) \rangle$ y $\ker\big((f - id_V)^2\big) = V2$, $\ker\big(f - id_V\big) = \langle (1,1,0,1), (0,0,1,0) \rangle$. Ahora si $v_1 = (1,2,0,0)$ tenemos $(f - id_V)(v_1) = (1,1,0,1)$. Entonces si $v_2 = (0,0,1,0)$ y $v_3 = (1,0,-1,1)$, $\mathcal{B} = \{(f - id_V)(v_1), v_1, v_2, v_3\}$ es una base de Jordan para f.

iv) Sea $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^4)$ dada por

$$f(x,y,z,w) = (z + w, y + w, -y + 2z - w, -2x + y + 2z + w)$$

1. Si $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^4$ entonces:

$$\big[f\big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Tenemos $P_f(t) = P_1(t)^2 P_2(t)^2$ donde $P_1(t) = (t - (1+i))$, $P_2(t) = (t - (1-i))$.
3. Sean $R_1(t) = P_2(t)^2$, $R_2(t) = P_1(t)^2$. Entonces

$$i\frac{t - (1-2i)}{4}R_1(t) - i\frac{t - (1+2i)}{4}R_2(t) = 1$$

así si $\Pi_1(t) = i\frac{t-(1-2i)}{4}R_1(t)$ y $\Pi_2(t) = -i\frac{t-(1+2i)}{4}R_2(t)$, entonces, para $i = 1,2$, $p_i = \Pi_i(f)$ es la proyección sobre $V_i = \ker(P_i(f)^{r_i})$ de acuerdo a la descomposición

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

4. Si $P_D(t) = (1+i)P_1(t) + (1-i)P_2(t)$ y $P_N = t - P_D(t)$ entonces $f_D = P_D(f)$ es diagonalizable, $f_N = P_n(f)$ es nilpotente y $f = f_D + f_N$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de f.
5. Tenemos $V_1 = \langle (2i, 1+i, 0, 2), (2, 1-i, 2, 0) \rangle$ y $V_2 = \langle (-2i, 1-i, 0, 2), (2, 1+i, 2, 0) \rangle$ y $\ker\big((f - (1+i)id_V)\big) = \langle (1-i, -i, 1, 1) \rangle$, $\ker\big((f - (1-i)id_V)\big) = \langle (1+i, i, 1, 1) \rangle$. Entonces si $v_1 = (2i, 1+i, 0, 2)$ y $v_2 = (-2i, 1-i, 0, 2)$, $\mathcal{B} = \{\big(f - (1+i)id_V\big)(v_1), v_1, \big(f - (1-i)id_V\big)(v_2), v_2\}$ es una base de Jordan para f.