1. Tenemos en $\mathbb{R}^4$ el producto hermítico definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + w_1w_2$$

y f el operador de $\mathbb{C}^4$ definido por

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) =& \frac{1}{4}\Big(3x + y + z + w,\ x + 3y - z - w, \\ & x - y + 3z - w,\ x - y - z + 3w\Big). \end{aligned}$$

(a) La representación matricial de f en la base canónica es

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Tenemos que $A^2 = A$, luego $f^2 = f$ y así f es una proyección. Para verificar que es ortogonal, verificamos que $\operatorname{im}(f) \perp \ker(f)$ o, equivalentemente, que generadores de $\operatorname{im}(f)$ son perpendiculares a generadores de $\ker(f)$. Pero como las columnas de A son las coordenadas en la base canónica de un conjunto de generadores de $\operatorname{im}(f)$ y las de $I_4 - A$ las de un conjunto de generadores de $\ker(f)$, entonces la igualdad

$$(I_4 - A)^+ A = 0$$

demuestra $\operatorname{im}(f) \perp \ker(f)$, y así f es una proyección ortogonal.

(c) La proyección ortogonal sobre el completo ortogonal de $\operatorname{im}(f)$ es $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4} - f$. Así

$$\begin{aligned} g(x, y, z, w) =& \frac{1}{4}\Big(x - y - z - w,\ -x + y + z + w, \\ & -x + y + z + w,\ -x + y + z + w\Big). \end{aligned}$$

(d) Como las columnas de A son las coordenadas en la base canónica de un conjunto de generadores de $\operatorname{im}(f)$, para encontrar una base ortonormal de $\operatorname{im}(f)$ basta con encontrar un subconjunto linealmente independiente de este conjunto de generadores y aplicarle ortogonalización de Gram-Schmidt. Obtenemos:

$$\mathcal{B}_1 = \{\frac{\sqrt{3}}{6}(3, 1, 1, 1), \frac{\sqrt{3}}{6}(0, 2, -1, -1), \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 0, 1, -1)\}$$

(e) Como las columnas de $I_4 - A$ son las coordenadas en la base canónica de un conjunto de generadores de $\ker(f)$, para encontrar una base ortonormal de $\ker(f)$ basta con encontrar un subconjunto linealmente independiente de este conjunto de generadores y aplicarle ortogonalización de Gram-Schmidt. Obtenemos:

$$\mathcal{B}_2 = \{\frac{1}{2}(1, -1, -1, -1)\}$$

(f) Como $A^+ = A$ y la base canónica es ortonormal entonces f es autoadjunto y así, por el Teorema Espectral, diagonalizable.

(g) Como $\operatorname{im}(f) \perp \ker(f)$, entonces $\mathcal{B}_1 \perp \mathcal{B}_2$ y así $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base ortonormal. Tenemos

$$\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Tenemos en $\mathbb{R}^4$ el producto interno definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \rangle = x_1\overline{x_2} + y_1\overline{y_2} + z_1\overline{z_2} + w_1\overline{w_2}.$$

y f el operador de $\mathbb{C}^4$ definido por

$$f(x, y, z, w) = \Big(2x - y - 3iz - 2iw,\ -x + 5y + iw,\\ 3ix + 3z - 3w,\ 2ix - iy - 3z + 2w\Big).$$

(a) La representación matricial de f en la base canónica es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3i & -2i \\ -1 & 5 & 0 & i \\ 3i & 0 & 3 & -3 \\ 2i & -i & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como $A^* = A$ y la base canónica es ortonormal entonces f es autoadjunto y, por el Teorema Espectral, es diagonalizable y sus espacios propios son dos a dos ortonormales.

(b) El polinomio característico de f es $P_f(t) = (t+3)(t-3)(t-6)^2$. Tenemos

$$\begin{aligned} \ker(f + 3\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}) &= \langle (i, 0, 1, 1) \rangle \\ \ker(f - 3\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}) &= \langle (-i, -i, 0, 1) \rangle \\ \ker(f - 6\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}) &= \langle (-i, 2i, 0, 1), (-i, i, 1, 0) \rangle \end{aligned}$$

luego una base ortonormal de cada uno de estos subespacios es respectivamente

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}(i, 0, 1, 1) \right\} \\ \mathcal{B}_2 &= \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}(-i, -i, 0, 1) \right\} \\ \mathcal{B}_3 &= \left\{ \frac{\sqrt{6}}{6}(-i, 2i, 0, 1), \frac{\sqrt{6}}{6}(-i, 0, 2i, -1) \right\} \end{aligned}$$

(c) Para $i = 1, 2, 3$, sea P_i la presentación matricial en la base canónica de la proyección ortogonal sobre $\langle \mathcal{B}_i \rangle$. En particular

$$P_i = A_i (A_i^* A_i)^{-1} A_i^*,$$

$i = 1, 2, 3$, donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -i \\ i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -i & -i \\ 2i & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así

$$P_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -i \\ 1 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & i & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 1 \\ -i & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & 0 & i \\ i & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -i & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Como f es diagonalizable entonces

$$f = -3p_1 + 3p_2 + 6p_3$$

donde p_i es la proyección sobre $\langle \mathcal{B}_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$. Por el Teorema Espectral, estas proyecciones son sobre subespacios dos a dos ortogonales.

(e) Como los espacios propios $\langle \mathcal{B}_1 \rangle$, $\langle \mathcal{B}_2 \rangle$, $\langle \mathcal{B}_3 \rangle$ son dos a dos ortogonales y las bases $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2, 3$ son ortonormales entonces

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$$

es una base ortonormal tal que

$$\begin{bmatrix} f \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$