1. Tenemos en $\mathbb{C}^4$ el producto hermítico definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \rangle = x_1\overline{x_2} + y_1\overline{y_2} + z_1\overline{z_2} + w_1\overline{w_2}$$

y f el operador de $\mathbb{C}^4$ definido por

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) =& \frac{1}{5}\Big(3x + iy + z + 2w,\ -ix + 2y - 2iz + iw, \\ & x + 2iy + 2z - w,\ 2x - iy - z + 3w\Big). \end{aligned}$$

(a) La representación matricial de f en la base canónica es

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & i & 1 & 2 \\ -i & 2 & -2i & i \\ 1 & 2i & 2 & -1 \\ 2 & -i & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Tenemos que $A^2 = A$, luego $f^2 = f$ y así f es una proyección. Para verificar que es ortogonal, verificamos que $\mathrm{im}(f) \perp \ker(f)$ o, equivalentemente, que generadores de $\mathrm{im}(f)$ son perpendiculares a generadores de $\ker(f)$. Pero como las columnas de A son las coordenadas en la base canónica de un conjunto de generadores de $\mathrm{im}(f)$ y las de $I_4 - A$ las de un conjunto de generadores de $\ker(f)$, entonces la igualdad

$$(I_4 - A)^* A = 0$$

demuestra $\mathrm{im}(f) \perp \ker(f)$, y así f es una proyección ortogonal.

(c) La proyección ortogonal sobre el completo ortogonal de $\mathrm{im}(f)$ es $g = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^4} - f$. Así

$$\begin{aligned} g(x, y, z, w) =& \frac{1}{5}\Big(2x - iy - z - 2w,\ ix + 3y + 2iz - iw, \\ & - x - 2iy + 3z + w,\ -2x + iy + z + 2w\Big). \end{aligned}$$

(d) Como las columnas de A son las coordenadas en la base canónica de un conjunto de generadores de $\mathrm{im}(f)$, para encontrar una base ortonormal de $\mathrm{im}(f)$ basta con encontrar un subconjunto linealmente independiente de este conjunto de generadores y aplicarle ortogonalización de Gram-Schmidt. Obtenemos:

$$\mathcal{B}_1 = \{\frac{\sqrt{15}}{15}(3, -i, 1, 2), \frac{\sqrt{3}}{3}(0, 1, i, -i)\}$$

(e) Como las columnas de $I_4 - A$ son las coordenadas en la base canónica de un conjunto de generadores de $\ker(f)$, para encontrar una base ortonormal de $\ker(f)$ basta con encontrar un subconjunto linealmente independiente de este conjunto de generadores y aplicarle ortogonalización de Gram-Schmidt. Obtenemos:

$$\mathcal{B}_2 = \{\frac{\sqrt{10}}{10}(2, i, -1, -2), \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, -i, 0)\}$$

(f) Como $A^* = A$ y la base canónica es ortonormal entonces f es autoadjunto y así, por el Teorema Espectral, diagonalizable.

(g) Como $\mathrm{im}(f) \perp \ker(f)$, entonces $\mathcal{B}_1 \perp \mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base ortonormal. Tenemos

$$\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Tenemos en $\mathbb{R}^4$ el producto interno definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + w_1w_2.$$

y f el operador de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) = \Big(&x - 2y - 2z + w,\ -2x + y - z + 2w,\\ &- 2x - y + z + 2w,\ x + 2y + 2z + w\Big). \end{aligned}$$

(a) La representación matricial de f en la base canónica es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $A^\intercal = A$ y la base canónica es ortonormal entonces f es autoadjunto y, por el Teorema Espectral, es diagonalizable.

(b) Como f es autoadjunto, para todo $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ tenemos $\langle f(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, f(v_2)\rangle$. En particular si $v_i \in \ker(f - \lambda_i \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$, $i = 1, 2$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces

$$\lambda_1\langle v_1, v_2\rangle = \langle f(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, f(v_2)\rangle = \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle,$$

así $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1, v_2\rangle = 0$, pero $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, luego $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. Luego $\ker(f - \lambda_1 \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) \perp \ker(f - \lambda_2 \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$.

(c) El polinomio caracteístico de f es $P_f(t) = (t + 4)(t - 4)(t - 2)^2$. Tenemos

$$\begin{aligned} \ker(f + 4\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) &= \langle (-1, -1, -1, 1)\rangle \\ \ker(f - 4\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) &= \langle (-1, 1, 1, 1)\rangle \\ \ker(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) &= \langle (1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0)\rangle \end{aligned}$$

luego una base ortonormal de cada uno de estos subespacios es respectivamente

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \left\{\frac{1}{2}(-1, -1, -1, 1)\right\} \\ \mathcal{B}_2 &= \left\{\frac{1}{2}(-1, 1, 1, 1)\right\} \\ \mathcal{B}_3 &= \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 0, 1), \frac{\sqrt{2}}{2}(0, -1, 1, 0)\right\} \end{aligned}$$

(d) Para $i = 1, 2, 3$, sea P_i la presentación matricial en la base canónica de la proyección ortogonal sobre $\langle \mathcal{B}_i\rangle$. En particular

$$P_i = A_i(A_i^\intercal A_i)^{-1}A_i^\intercal,$$

$i = 1, 2, 3$, donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así

$$P_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Como f es diagonalizable entonces

$$f = -4p_1 + 4p_2 + 2p_3$$

donde p_i es la proyección sobre $\langle \mathcal{B}_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$. Por el Teorema Espectral, estas proyecciones son sobre subespacios dos a dos ortogonales.

(f) Como los espacios propios $\langle \mathcal{B}_1 \rangle$, $\langle \mathcal{B}_2 \rangle$, $\langle \mathcal{B}_3 \rangle$ son dos a dos ortogonales y las bases $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2, 3$ son ortonormales entonces

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$$

es una base ortonormal tal que

$$\big[f\big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$