1. Sea $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^6, \mathbb{Q}^6)$ definido por

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (&3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 3x_6,\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 3x_6, \\ &2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 + 2x_6,\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 3x_6, \\ &2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 + 2x_6,\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 2x_6) \end{aligned}$$

(a) Como $f^2 \neq 0$ pero $f^3 = 0$ entonces el grado de nilpotencia de f es 3.

(b) Tenemos

$$\begin{aligned} \dim\Big(\ker(f)\Big) =& 3 \\ \dim\Big(\ker(f^2)\Big) =& 3+2 \\ \dim\Big(\ker(f^3)\Big) =& 3+2+1 \end{aligned}$$

así que en la forma normal de Jordan de f tenemos tres bloques: uno de dimensión 3×3, uno de dimensión 2×2 y otro de dimensión 1×1. Luego la forma normal de Jordan de f es

$$\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

(c) Tenemos

$$\begin{aligned} \ker(f) =& \langle(-1,0,0,0,0,1),\ (2,1,0,1,1,0),\ (-1,0,1,0,0,0)\rangle \\ \ker(f^2) =& \langle(-1,0,0,0,0,1),\ (-1,0,0,0,1,0),\ (4,0,0,1,0,0),\ (-1,0,1,0,0,0),\ (-1,1,0,0,0,0)\rangle \\ \ker(f^3) =& \mathbb{Q}^6 \end{aligned}$$

Tomamos

$$\begin{aligned} v_3 =& (0,0,1,0,0,0) \in \ker(f^3) \setminus \ker(f^2) \\ v_5 =& (4,0,0,1,0,0) \in \ker(f^2) \setminus \Big(\ker(f) + \langle f(v_3), f^2(v_3)\rangle\Big) \\ v_6 =& (-1,0,0,0,0,1) \in \ker(f) \setminus \langle f(v_5), f^2(v_3)\rangle. \end{aligned}$$

Así $\mathcal{B} = \{f^2(v_3), f(v_3), v_3, f(v_5), v_5, v_6\}$ es una base de Jordan para f.

2. Sea $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^6, \mathbb{Q}^6)$ definido por

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (&4x_1 - 6x_2 - 6x_3 - x_4 + 4x_5 + 9x_6,\ -x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 + 4x_5 + 9x_6, \\ &- 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 + 8x_6,\ -2x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 8x_6, \\ &x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 + 11x_6,\ -5x_2 - 5x_3 + 10x_5 + 5x_6) \end{aligned}$$

(a) La representación matricial de f en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 & -1 & 4 & 9 \\ -1 & -1 & -6 & -1 & 4 & 9 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 3 & 8 \\ -2 & -7 & -2 & 3 & 3 & 8 \\ 1 & -4 & -4 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

(b) Tenemos $P_f(t) = P_1(t)^2 P_2(t)^4$ donde $P_1(t) = t + 5$, $P_2(t) = t - 5$.

(c) Sean $R_1(t) = P_2(t)^4$ y $R_2(t) = P_1(t)^2$. Tenemos

$$\frac{2t+15}{50000}R_1(t) - \frac{2t^3-45t^2+400t-1625}{50000}R_2(t) = 1$$

así si $\Pi_1(t) = \dfrac{2t+15}{50000}R_1(t)$ y $\Pi_2(t) = -\dfrac{2t^3-45t^2+400t-1625}{50000}R_2(t)$ entonces, para $i=1,2$, $p_i = \Pi_i(f)$ es la proyección sobre $V_i = \ker(P_i(f))$ de acuerdo a la descomposición

$$V = V_1 \oplus V_2$$

(d) Tenemos para $i = 1,2$

$$\Big[p_i\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \Big[\Pi_i(f)\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \Pi_i(\Big[f\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}).$$

Entonces

$$\Big[p_1\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix},$$

y

$$\Big[p_2\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

(e) Tenemos

$$\begin{aligned} \dim\Big(\ker\big(P_1(f)\big)\Big) =& 1 \\ \dim\Big(\ker\big(P_1(f)^2\big)\Big) =& 1+1 \\ \dim\Big(\ker\big(P_2(f)\big)\Big) =& 2 \\ \dim\Big(\ker\big(P_2(f)^2\big)\Big) =& 2+1 \\ \dim\Big(\ker\big(P_2(f)^3\big)\Big) =& 2+1+1 \end{aligned}$$

así que en la forma normal de Jordan de $f\restriction_{V_1}$ tenemos un único bloque 2×2, y en la forma normal de Jordan de $f\restriction_{V_2}$ tenemos dos bloques: uno de dimensión 3×3 y otro de dimensión 1×1. Luego la forma normal de Jordan de f es

$$\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{cc||ccc|c} -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right].$$

(f) Tenemos

$$
\begin{aligned}
\ker(P_1(f)) =& \langle (1,1,1,1,1,0) \rangle \\
\ker(P_1(f)^2) =& \langle (1,1,1,1,0,1),\ (1,1,1,1,1,0) \rangle \\
\ker(P_2(f)) =& \langle (1,1,1,0,1,1),\ (-1,0,0,1,0,0) \rangle \\
\ker(P_2(f)^2) =& \langle (2,1,0,0,1,1),\ (-1,0,0,1,0,0),\ (-1,0,1,0,0,0) \rangle \\
\ker(P_2(f)^3) =& \langle (3,0,0,0,1,1),\ (-1,0,0,1,0,0),\ (-1,0,1,0,0,0),\ (-1,1,0,0,0,0) \rangle
\end{aligned}
$$

Tomamos

$$
\begin{aligned}
v_2 =& (1,1,1,1,0,1) \in \ker\left(P_1(f)^2\right) \setminus \ker\left(P_1(f)\right) \\
v_5 =& (-1,1,0,0,0,0) \in \ker\left(P_2(f)^3\right) \setminus \ker\left(P_2(f)^2\right) \\
v_6 =& (-1,0,0,1,0,0) \in \ker\left(P_2(f)\right) \setminus \langle P_2(f)(v_5) \rangle.
\end{aligned}
$$

Así $\mathcal{B} = \{P_1(f)(v_2), v_2, P_2(f)^2(v_5), P_2(f)(v_5), v_5, v_6\}$ es una base de Jordan para f.

(g) Si $P_D(t) = -5\Pi_1(t) + 5\Pi_2(t)$ y $P_N = t - P_D(t)$ entonces $f_D = P_D(f)$ es diagonalizable, $f_N = P_n(f)$ es nilpotente y $f = f_D + f_N$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de f.