1. Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^5, \mathbb{Q}^5)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ está dada por

$$(4x_1{-}24x_2{-}8x_3{+}4x_4{-}2x_5, 3x_2{-}x_4, x_1{-}14x_2{-}2x_3{+}4x_4{-}x_5, x_1{-}3x_2{-}2x_3{+}x_4, 2x_1{-}9x_2{-}4x_3{+}x_4{+}x_5).$$

   (a) La representación matricial de f en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 4 & -24 & -8 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -14 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (b) Tenemos $P_f(t) = P_1(t)P_2(t)P_3(t)^3$ donde $P_1(t) = t$, $P_2(t) = (t-1)$ $P_3(t) = (t-2)$.

   (c) Sean $R_1(t) = P_2(t)P3(t)^3$, $R_2(t) = P_1(t)P_3(t)^3$, $R_3 = P_1(t)P_2(t)$. Tenemos

$$\frac{1+7t}{8}R_1(t) - \frac{1+7t}{8}R_2(t) + \frac{44-34t+7t^2}{8}R_3(t) = 1$$

   así si $\Pi_1(t) = \frac{1+7t}{8}R_1(t)$, $\Pi_2(t) = -\frac{1+7t}{8}R_2(t)$ y $\Pi_3(t) = \frac{44-34t+7t^2}{8}R_3(t)$ entonces, para $i = 1, 2, 3$, $p_i = \Pi_i(f)$ es la proyección sobre $V_i = \ker(P_i(f))$ de acuerdo a la descomposición

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3.$$

   (d) Tenemos para $i = 1, 2, 3$

$$\Big[p_i\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \Big[\Pi_i(f)\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \Pi_i(\Big[f\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}).$$

   Entonces

$$\Big[p_1\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & 16 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Big[p_2\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -10 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   y

$$\Big[p_3\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

   (e) Si $P_D(t) = 0\Pi_1(t) + \Pi_2(t) + 2\Pi_3(t)$ y $P_N = t - P_D(t)$ entonces $f_D = P_D(f)$ es diagonalizable, $f_N = P_n(f)$ es nilpotente y $f = f_D + f_N$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de f.

   (f) Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{Q}^5$. Tenemos

$$\Big[f_D\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = P_D(\Big[f\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 & -22 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -11 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\left[f_N\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = P_N(\left[f\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(g) **[/7pts]** Tenemos $V_1 = \langle(2,0,1,0,0)\rangle$, $V_2 = \langle(2,0,1,0,-1)$ y $V_3 = \langle(1,0,0,0,1),(0,0,0,1,1),(-6,1,-3,0,5)$. Ahora $(-6,1,-3,0,5) \in \ker(f-2id_{\mathbb{Q}^5})^3 \setminus \ker(f-2id_{\mathbb{Q}^5})^2$. Entonces si $v_1 = (2,0,1,0,0)$, $v_2 = (2,0,1,0,-1)$ y $v_3 = (1,0,0,0,1)$ entonces $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, (f-2id_{\mathbb{Q}^5})^2(v_3), (f-2id_{\mathbb{Q}^5})(v_3), v_3\}$ es una base de Jordan para f. Tenemos

$$\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\left[f_D\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

y

$$\left[f_N\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^5, \mathbb{Q}^5)$ donde $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ está dada por

$$(x_1-5x_2-2x_3+x_4+x_5, -x_1+4x_2+2x_3, 3x_1-13x_2-6x_3+x_4, -x_1+4x_2+2x_3, -x_1+5x_2+2x_3-x_4+x_5).$$

Tenemos $P_f(t) = t^5$, luego la matriz es nilpotente. Por otro lado

$$\begin{aligned} \dim\Big(\ker(f)\Big) &= 2 \\ \dim\Big(\ker(f^2)\Big) &= 2+2 \\ \dim\Big(\ker(f^3)\Big) &= 2+2+1 \end{aligned}$$

así que en la forma normal de Jordan de f tenemos dos bloques, uno de dimensión 2×2 y otro de dimensión 3×3. Tenemos $v_2 = (1,0,0,0,0) \in \ker(f^3) \setminus \ker(f^2)$ y $v_1 = (-1,0,0,1,0) \in \ker(f^2) \setminus \Big(\ker(f) + \langle v_2, f(v_2), f^2(v_2)\rangle\Big)$. Así $\mathcal{B} = \{f(v_1), v_1, f^2(v_2), f(v_2), v_2\}$ es una base de Jordan para f y

$$\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$