1. Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^5, \mathbb{Q}^5)$ definido por

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = & (6x_1 - 26x_2 - 12x_3 + 4x_4 - 4x_5, \\ = & \quad x_1 - 9x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5,\ 9x_2 + 2x_3, -6x_2 - x_3 + 2x_4, \\ = & \qquad -x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5). \end{aligned}$$

   (a) Tenemos $P_f(t) = P_1(t)^2 P_2(t)^3$ donde $P_1(t) = t+1$, $P_2(t) = t-2$. Sean $R_1(t) = P_2(t)^3$ y $R_2(t) = P_1(t)^2$. Tenemos

$$-\frac{t+2}{27} R_1(t) + \frac{t^2 - 6t + 11}{27} R_2(t) = 1$$

   así si $\Pi_1(t) = -\dfrac{t+2}{27} R_1(t)$ y $\Pi_2(t) = \dfrac{t^2-6t+11}{27} R_2(t)$ entonces, para $i = 1, 2$, $p_i = \Pi_i(f)$ es la proyección sobre $V_i = \ker(P_i(f))$ de acuerdo a la descomposición

$$V = V_1 \oplus V_2$$

   (b) Tenemos para $i = 1, 2$

$$\Big[p_i\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \Big[\Pi_i(f)\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \Pi_i(\Big[f\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}).$$

   Entonces

$$\Big[p_1\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 & 14 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   y

$$\Big[p_2\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & -14 & -6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (c) Si $P_D(t) = -\Pi_1(t) + 2\Pi_2(t)$ y $P_N = t - P_D(t)$ entonces $f_D = P_D(f)$ es diagonalizable, $f_N = P_n(f)$ es nilpotente y $f = f_D + f_N$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de f.

   (d) Tenemos

$$\begin{aligned} \dim\Big(\ker\big(P_1(f)\big)\Big) =& 1 \\ \dim\Big(\ker\big(P_1(f)^2\big)\Big) =& 1+1 \\ \dim\Big(\ker\big(P_2(f)\big)\Big) =& 2 \\ \dim\Big(\ker\big(P_2(f)^2\big)\Big) =& 2+1 \end{aligned}$$

   así que en la forma normal de Jordan de $f \restriction_{V_1}$ tenemos un único bloque 2×2, y en la forma normal de Jordan de $f \restriction_{V_2}$ tenemos dos bloques: uno de dimensión 2×2 y otro de dimensión 1×1. Tenemos

$$\begin{aligned} \ker(P_1(f)) =& \langle(-2,1,-3,1,0)\rangle \\ \ker(P_1(f)^2) =& \langle(4,1,0,1,0),\ (2,0,1,0,0)\rangle \\ \ker(P_2(f)) =& \langle(-1,0,0,1,0),\ (1,0,0,0,1)\rangle \\ \ker(P_2(f)^2) =& \langle(-1,0,0,1,0),\ (1,0,0,0,1),\ (3,0,1,0,0)\rangle \end{aligned}$$

Tomamos

$$\begin{aligned}
v_2 =& (2,0,1,0,0) \in \ker\big(P_1(f)^2\big) \setminus \ker\big(P_1(f)\big)\\
v_4 =& (3,0,1,0,0) \in \ker\big(P_2(f)^2\big) \setminus \ker\big(P_2(f)\big)\\
v_5 =& (1,0,0,0,1) \in \ker\big(P_2(f)\big) \setminus \langle P_2(f)(v_4)\rangle.
\end{aligned}$$

Así $\mathcal{B} = \{P_1(f)(v_2), v_2, P_2(f)(v_4), v_4, v_5\}$ es una base de Jordan para f. La forma normal de Jordan de f es

$$\big[f\big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{rr||rr|r} -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ \hline\hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

y

$$\big[f_D\big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{rr||rr|r} -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ \hline\hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right], \qquad \big[f_N\big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{rr||rr|r} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline\hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

2. Sea $\mathbb{C}^4$ con el producto hermítico

$$\langle (x_1,y_1,z_1,w_1),(x_2,y_2,z_2,w_2)\rangle = x_1\overline{x_2} + y_1\overline{y_2} + z_1\overline{z_2} + w_1\overline{w_2},$$

y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4,\mathbb{C}^4)$ definido por

$$f(x,y,z,w) = \Big(3x + 3iy + 3iw,\ -3ix + 3y - 3w,\quad z,\ -3ix - 3y + 3w\Big).$$

(a) Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{C}^4$. Si $A = \big[f\big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ entonces $A^* = A$ y como $\mathcal{C}$ es una base ortonormal entonces f es autoadjunto. Luego, por el teorema espectral, f es diagonalizable y sus espacios propios son dos a dos ortogonales.

(b) El polinomio característico de f es $P_f(t) = (t+3)(t-1)(t-6)^2$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\ker(f + 3\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}) &= \langle (-i,1,0,1)\rangle\\
\ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}) &= \langle (0,0,1,0)\rangle\\
\ker(f - 6\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}) &= \langle (i,1,0,0),(i,0,0,1)\rangle
\end{aligned}$$

luego una base ortonormal de cada uno de estos subespacios es respectivamente

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &= \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}(-i,1,0,1)\right\}\\
\mathcal{B}_2 &= \{(0,0,1,0)\}\\
\mathcal{B}_3 &= \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(i,1,0,0), \frac{\sqrt{6}}{6}(i,-1,0,2)\right\}
\end{aligned}$$

(c) Para $i = 1,2,3$, sea P_i la presentación matricial en la base canónica de la proyección ortogonal sobre $\langle \mathcal{B}_i\rangle$. En particular

$$P_i = A_i(A_i^* A_i)^{-1}A_i^*,$$

$i = 1, 2, 3$, donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} i & i \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así

$$P_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -i & 0 & -i \\ i & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & i & 0 & i \\ -i & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(d) Como los espacios propios $\langle \mathcal{B}_1 \rangle$, $\langle \mathcal{B}_2 \rangle$, $\langle \mathcal{B}_3 \rangle$ son dos a dos ortogonales y las bases $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2, 3$ son ortonormales entonces

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$$

es una base ortonormal tal que

$$\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

3. Sea (e_1, e_2, e_3) la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y (e^1, e^2, e^3) la base dual. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

y $s \in T^{(0,2)}(\mathbb{R}^3)$ definida por

$$s(x^i e_i, y^j e_j) = a_{ij} x^i y^j.$$

(a) Si $f_\alpha = c^i_\alpha e_i$, $\alpha = 1, 2, 3$ con $C = (c^i_\alpha)$ la matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

entonces los f_α son vectores propios de A con valores propios respectivos $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 6$.

(b) Como $a_{ij} = a_{ji}$ entonces

$$s(y^j e_j, x^i e_i) = a_{ji} y^j x^i = a_{ij} x^i y^j = s(x^i e_i, y^j e_j)$$

luego s es simétrica. Además como los f_α son vectores propios de A y C es ortogonal, entonces

$$\begin{aligned} a_{ij} c^j_\beta &= \lambda_\beta c^i_\beta \\ c^i_\alpha c^i_\beta &= \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

así

$$c^i_\alpha a_{ij} c^j_\beta = c^i_\alpha \lambda_\beta c^i_\beta = \lambda_\beta \delta_{\alpha\beta}$$

y

$$s(c^i_\alpha e_i, c^j_\beta e_j) = a_{ij} c^i_\alpha c^j_\beta = \lambda_\beta \delta_{\alpha\beta},$$

es decir $s(f_\alpha, f_\beta) = \lambda_\beta \delta_{\alpha\beta}$. Luego, como $\lambda_\alpha > 0$ para $\alpha = 1, 2, 3$,

$$s(x^\alpha f_\alpha, x^\beta f_\beta) = \lambda_\beta \delta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = \lambda_\alpha (x^\alpha)^2 \geq 0,$$

y entonces s es bilineal, simétrica y es definitivamente positiva luego es un producto interno.

(c) Para $i = 1, 2, 3$ sea $E_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} f_i$ así

$$s(E_i, E_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} s(f_i, f_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \lambda_i \delta_{ij} = \delta_{ij}$$

luego (E_1, E_2, E_3) es ortonormal respecto a s.

(d) Si (E^1, E^2, E^3) es la base dual de (E_1, E_2, E_3) entonces $s = s(E_i, E_j) E^i \otimes E^j$, en particular

$$s = E^1 \otimes E^1 + E^2 \otimes E^2 + E^3 \otimes E^3.$$

4. Sea (e_1, e_2, e_3) la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y (e^1, e^2, e^3) la base dual. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

y $s \in T^{(0,2)}(\mathbb{R}^3)$ definida por

$$s(x^i e_i, y^j e_j) = a_{ij} x^i y^j.$$

(a) Si $f_\alpha = c^i_\alpha e_i$, $\alpha = 1, 2, 3$ con $C = (c^i_\alpha)$ la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

entonces los f_α son vectores propios de A con valores propios respectivos $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$ y $\lambda_3 = -6$.

(b) Como los f_α son vectores propios de A y C es ortogonal, entonces

$$\begin{aligned} a_{ij} c^j_\beta &= \lambda_\beta c^i_\beta \\ c^i_\alpha c^i_\beta &= \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

así

$$c^i_\alpha a_{ij} c^j_\beta = c^i_\alpha \lambda_\beta c^i_\beta = \lambda_\beta \delta_{\alpha\beta}$$

y

$$s(c^i_\alpha e_i, c^j_\beta e_j) = a_{ij} c^i_\alpha c^j_\beta = \lambda_\beta \delta_{\alpha\beta},$$

es decir $s(f_\alpha, f_\beta) = \lambda_\beta \delta_{\alpha\beta}$. Luego si (f^1, f^2, f^3) es la dual de (f_1, f_2, f_3), como

$$s = s(f_i, f_j) f^i \otimes f^j$$

entonces

$$s = 2f^1 \otimes f^1 - 3f^2 \otimes f^2 - 6f^3 \otimes f^3.$$

(c) Para $i = 1, 2, 3$ sea $E_i = \dfrac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} f_i$ así

$$s(E_i, E_j) = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_j|}} s(f_i, f_j) = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_j|}} \lambda_i \delta_{ij} = \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \delta_{ij}$$

luego si (E^1, E^2, E^3) es la base dual de (E_1, E_2, E_3) entonces $s = s(E_i, E_j) E^i \otimes E^j$, en particular

$$s = E^1 \otimes E^1 - E^2 \otimes E^2 - E^3 \otimes E^3.$$