Álgebra Lineal 2 - Taller 8

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

1. Considere $\mathbb{C}^4$ con el producto interno definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1); (x_2, y_2, z_2, w_2) \rangle = x_1\overline{x_2} + y_1\overline{y_2} + z_1\overline{z_2} + w_1\overline{w_2}.$$

   Sea f el operador de $\mathbb{C}^4$ definido por

$$f(x, y, z, w) = \frac{1}{6}(5x+(1+i)y+(1+i)z+iw, (1-i)x+4y-2z-(1+i)w, (1-i)x-2y+4z-(1+i)w, -ix-(1-i)y-(1-i)z+5w).$$

   (a) Demuestre que f es una proyección ortogonal sobre un subespacio V_1 de $\mathbb{C}^4$.

   (b) Encuentre una base ortonormal de V_1 y del complemento ortogonal de V_1.

2. Considere $\mathbb{C}^3$ con el producto interno definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1\overline{x_2} + y_1\overline{y_2} + z_1\overline{z_2}.$$

   Sea f el operador de $\mathbb{C}^3$ definido por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(-x - 2iy + z, 2ix + 2y + 2iz, x - 2iy - z).$$

   (a) Encuentre una base ortonormal formada por vectores propios de f y la representación matricial de f respecto a esta base.

   (b) Escriba f como combinación lineal de proyecciones ortogonales sobre subespacios dos a dos ortogonales.

Solución

1. (a) Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{C}^4$. Tenemos

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 1+i & 1+i & i \\ 1-i & 4 & -2 & -(1+i) \\ 1-i & -2 & 4 & -(1+i) \\ -i & -(1-i) & -(1-i) & 5 \end{bmatrix} = A.$$

Como $A^2 = A$ entonces $f^2 = f$, luego f es una proyección. Además, para todo $v \in \mathbb{C}^4$, si $x = [v]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$, como $A^* = A$ entonces

$$\begin{aligned} \langle f(v); v - f(v)\rangle &= (x - Ax)^* Ax \\ &= (x^*A^* - x^*)Ax \\ &= (x^*A - x^*)Ax \\ &= x^*A^2x - x^*Ax \\ &= x^*Ax - x^*Ax = 0 \end{aligned}$$

y así $f(v)$ es perpendicular a $v - f(v)$, luego f es una proyección ortonormal.

(b) Si tomamos columnas de A y $I - A$ vemos que $\operatorname{im}(f) = \langle \frac{1}{6}(5, 1-i, 1-i, -i), \frac{1}{6}(1+i, 4, -2, -(1-i)), \frac{1}{6}(1+i, -2, 4, -(1-i))\rangle$ y $\operatorname{im}(f)^\perp = \langle \frac{1}{6}(-1, 1-i, 1-i, -i)\rangle$. Sea $v_1 = \frac{1}{6}(5, 1-i, 1-i, -i)$, $v_2 = \frac{1}{6}(1+i, 4, -2, -(1-i))$, y $v_3 = \frac{1}{6}(1+i, -2, 4, -(1-i))$. Si definimos

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\|v_1\|}v_1 \\ &= \frac{\sqrt{30}}{30}(5, 1-i, 1-i, -i) \\ v_2' &= v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 \\ &= \frac{1}{6}(1+i, 4, -2, -(1-i)) - \frac{1+i}{30}(5, 1-i, 1-i, -i) \\ &= \frac{1}{5}(0, 3, -2, -(1-i)) \\ u_2 &= \frac{1}{\|v_2'\|}v_2' \\ &= \frac{\sqrt{15}}{15}(0, 3, -2, -(1-i)) \\ v_3' &= v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2 \\ &= \frac{1}{6}(1+i, -2, 4, -(1-i) - \frac{1+i}{30}(5, 1-i, 1-i, -i) + \frac{2}{15}(0, 3, -2, -(1-i)) \\ &= \frac{1}{3}(0, 0, 1, -(1-i)) \\ u_3 &= \frac{1}{\|v_3'\|}v_3' \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}(0, 0, 1, -(1-i)) \end{aligned}$$

por el proceso de ortonormalización de Gram-Schimdt $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortonormal de $\operatorname{im}(f)$. Similarmente, si $v_4 = \frac{1}{6}(-1, 1-i, 1-i, -i)$ y tomamos

$$\begin{aligned} u_4 &= \frac{1}{\|v_4\|}v_4 \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6}(-1, 1-i, 1-i, -i) \end{aligned}$$

entonces $\{u_4\}$ es una base ortonormal de $\operatorname{im}(f)^\perp$.

2. (a) Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{C}^3$. Tenemos

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -2i & 1 \\ 2i & 2 & 2i \\ 1 & -2i & -1 \end{bmatrix} = A$$

así $P_f(t) = \det(tI - A) = (t-2)(t+1)^2$ y 2, -1 son los valores propios. Como

$$A - 2I = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 & -2i & 1 \\ 2i & -2 & 2i \\ 1 & -2i & -5 \end{bmatrix} \qquad A + I = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2i & 1 \\ 2i & 4 & 2i \\ 1 & -2i & 1 \end{bmatrix}$$

un vector propio asociado a 2 es $v_1 = (1, 2i, 1)$ y dos vectores propios linealmente independiente asociados a -1 son $v_2 = (-1, 0, 1)$ y $v_3 = (2i, 1, 0)$. Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ entonces

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ortonormalizamos la base $\mathcal{B}$: definimos

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\sqrt{6}}{6} v_1 \\ u_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} v_2 \\ v_3' &= v_3 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 \\ &= (i, 1, i) \\ u_3 &= \frac{\sqrt{3}}{3} v_3' \end{aligned}$$

de tal forma que $\mathcal{B}_o = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortonormal formada por vectores propios y

$$[f]_{\mathcal{B}_o}^{\mathcal{B}_o} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Por el teorema espectral $f = 2\pi_2 - \pi_{-1}$ donde π_2 y π_{-1} son respectivamente las proyecciones sobre $V_2 = \langle v_1 \rangle$ y $V_{-1} = \langle v_2, v_3 \rangle$, y $V_2 \perp V_{-1}$.
Observación: Si

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X_{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2i \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$P_2 = X_2(X_2^T X_2)^{-1} X_2^T \qquad P_{-1} = X_{-1}(X_{-1}^T X_{-1})^{-1} X_{-1}^T$$

entonces

$$P_2 = [\pi_2]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2i & 1 \\ 2i & 4 & 2i \\ 1 & -2i & 1 \end{bmatrix} \qquad P_{-1} = [\pi_{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2i & -1 \\ -2i & 2 & -2i \\ -1 & 2i & 5 \end{bmatrix}$$

y

$$A = 2P_2 - P_{-1}.$$