Álgebra Lineal 2 - Taller 7

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

1. Considere $\mathbb{R}^4$ con el producto interno definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1); (x_2, y_2, z_2, w_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + w_1w_2.$$

   Sea f el operador de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$f(x, y, z, w) = \frac{1}{5}(2x - y + z + 2w, -x + 3y + 2z - w, x + 2y + 3z + w, 2x - y + z + 2w).$$

   (a) Demuestre que f es una proyección ortogonal sobre un subespacio V_1 de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Encuentre una base ortonormal de V_1 y del complemento ortogonal de V_1.

2. Considere $\mathbb{R}^3$ con el producto interno definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

   Sea f el operador de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$f(x, y, z) = (2x + 2y - z, 2x - y + 2z, -x + 2y + 2z).$$

   (a) Encuentre una base ortonormal formada por vectores propios de f y la representación matricial de f respecto a esta base.

   (b) Escriba f como combinación lineal de proyecciones ortogonales sobre subespacios dos a dos ortogonales.

Solución

1. (a) Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Tenemos

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = A.$$

Como $A^2 = A$ entonces $f^2 = f$, luego f es una proyección. Además, para todo $v \in \mathbb{R}^4$, si $x = [v]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$, como $A^T = A$ entonces

$$\begin{aligned} \langle f(v); v - f(v)\rangle &= (x - Ax)^T Ax \\ &= (x^T A^T - x^T)Ax \\ &= (x^T A - x^T)Ax \\ &= x^T A^2 x - x^T Ax \\ &= x^T Ax - x^T Ax = 0 \end{aligned}$$

y así $f(v)$ es perpendicular a $v - f(v)$, luego f es una proyección ortonormal.

(b) Si tomamos columnas de A y $I - A$ vemos que $\operatorname{im}(f) = \langle \frac{1}{5}(2,-1,1,2), \frac{1}{5}(-1,3,2,-1)\rangle$ y $\operatorname{im}(f)^{\perp} = \langle \frac{1}{5}(-3,-1,1,2), \frac{1}{5}(-1,-2,2,-1)\rangle$. Sea $v_1 = \frac{1}{5}(2,-1,1,2)$ y $v_2 = \frac{1}{5}(-1,3,2,-1)$. Si definimos

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\|v_1\|}v_1 \\ &= \frac{\sqrt{10}}{10}(2,-1,1,2) \\ v_2' &= v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 \\ &= \frac{1}{5}(-1,3,2,-1) + \frac{1}{10}(2,-1,1,2) \\ &= \frac{1}{2}(0,1,1,0) \\ u_2 &= \frac{1}{\|v_2'\|}v_2' \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,1,0) \end{aligned}$$

por el proceso de ortonormalización de Gram-Schimdt $\{u_1, u_2\}$ es una base ortonormal de $\operatorname{im}(f)$. Similarmente, si $v_3 = \frac{1}{5}(-3,-1,1,2)$ y $v_4 = \frac{1}{5}(-1,-2,2,-1)$ y tomamos

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{1}{\|v_3\|}v_3 \\ &= \frac{\sqrt{15}}{15}(-3,-1,1,2) \\ v_4' &= v_4 - \langle v_4, u_3\rangle u_3 \\ &= \frac{1}{5}(-1,-2,2,-1) - \frac{1}{15}(-3,-1,1,2) \\ &= \frac{1}{3}(0,-1,1,-1) \\ u_4 &= \frac{\sqrt{3}}{3}(0,-1,1,-1) \end{aligned}$$

entonces $\{u_3, u_4\}$ es una base ortonormal de $\operatorname{im}(f)^{\perp}$.

2. (a) Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Tenemos

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = A$$

así $P_f(t) = \det(tI - A) = (t+3)(t-3)^2$ y -3, 3 son los valores propios. Como

$$A + 3I = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

un vector propio asociado a -3 es $v_1 = (1, -2, 1)$ y dos vectores propios linealmente independiente asociados a 3 son $v_2 = (-1, 0, 1)$ y $v_3 = (2, 1, 0)$. Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ entonces

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ortonormalizamos la base $\mathcal{B}$: definimos

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\sqrt{6}}{6} v_1 \\ u_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} v_2 \\ v_3' &= v_3 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 \\ &= (1, 1, 1) \\ u_3 &= \frac{\sqrt{3}}{3} v_3' \end{aligned}$$

de tal forma que $\mathcal{B}_o = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortonormal formada por vectores propios y

$$[f]_{\mathcal{B}_o}^{\mathcal{B}_o} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Por el teorema espectral $f = -3\pi_{-3} + 3\pi_3$ donde π_{-3} y π_3 son respectivamente las proyecciones sobre $V_{-3} = \langle v_1 \rangle$ y $V_3 = \langle v_2, v_3 \rangle$ y $V_{-3} \perp V_3$.
Observación: Si

$$X_{-3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$P_{-3} = X_{-3}(X_{-3}^T X_{-3})^{-1} X_{-3}^T \qquad P_3 = X_3(X_3^T X_3)^{-1} X_3^T$$

entonces

$$P_{-3} = [\pi_{-3}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_3 = [\pi_3]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

y

$$A = -3P_{-3} + 3P_3.$$