Álgebra Lineal 2 - Taller 5

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

Para cada uno de los siguientes operadores $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$, $V = K^d$:

i) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ donde

$$f(x,y,z,w) = (-3x - y + 5w, -x - 2y + z + 4w, 4x + y + z - 5w, -2x - y + 4w),$$

ii) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ donde

$$f(x,y,z,w) = (-3x - y + 5w, -x - 2y + z + 4w, 4x + y + z - 5w, -2x - y + 4w),$$

iii) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ donde

$$f(x,y,z,w) = (2x - 2y + z - w, y + z, 3x - 4y + z - 3w, -x + 2z),$$

iv) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^4)$ donde

$$f(x,y,z,w) = (2x - 2y + z - w, y + z, 3x - 4y + z - 3w, -x + 2z),$$

1. Encuentre la representación matricial de f en la base canónica.
2. Encuentre la factorización del polinomio característico $P_f(t)$ como producto de potencias de polinomios irreducibles de $K[t]$:
$$P_f(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t)^{r_i}$$
donde cada $P_i(t) \in \mathbb{K}[t]$ es irreducible.
3. Sean $V_i = \ker\left(P_i(f)^{r_i}\right)$, $i = 1, \ldots, n$, y $p_1, \ldots, p_n$ las proyecciones sobre $V_1, \ldots, V_n$ respecto a la descomposición $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$. Encuentre polinomios $\Pi_1(t), \ldots, \Pi_n(t) \in K[t]$ tales que $\Pi_i(f) = p_i$, $i = 1, \ldots, n$.
4. Encuentre una base de V respecto a la cual la representación matricial de f es diagonal por bloques de tamaño $\dim(V_i)$, $i = 1, \ldots, n$, y cada bloque corresponde a una representación matricial de $f\restriction_{V_i}$.

<u>Ejemplo</u>
Sea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular su polinomio característico en la variable t y su factorización ejecutamos:

```
sage: t=PolynomialRing(QQ, 't').gen()
sage: A=Matrix(QQ,[[-1,-2],[-1,1]])
sage: P=A.charpoly('t')
sage: factor(P)
```

Vemos que $P_A(t) = t^2 - 3$. Para factorizarlo en los reales (donde $P_A(t) = (t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})$) debemos agregarle en Sage $\sqrt{3}$ a nuestro cuerpo $\mathbb{Q}$. Para ello ejecutamos:

```
sage: K.<r> = QQ.extension(P)
```

Esto le agrega la raíz de $P_A(t)$ a nuestro cuerpo. El nuevo cuerpo se llama K y en él r denota $\sqrt{3}$. Para factorizarlo debemos explicarle a Sage que ahora vamos a trabajar en K en vez de $\mathbb{Q}$.

```
sage: P=P.change_ring(K)
sage: factor(P)
```

Tenemos dos subespacios invariantes $V_1 = \ker(A - \sqrt{3}I_2)$ y $V_2 = \ker(A + \sqrt{3}I_2)$. Para obtener los polinomios $\Pi_1(t), \Pi_2(t) \in \mathbb{R}[t]$ tales que, para $i = 1, 2$, $\Pi_i(A)$ sea la proyección p_i sobre V_i de acuerdo a la descomposición $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, ejecutamos

```
sage: P1=(t - r)
sage: P2=(t + r)
sage: P12,Q1,Q2=xgcd(P1,P2)
sage: Pi1=Q2*P2
sage: Pi2=Q1*P1
```

Las dos matrices de proyección $\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$, las calculamos ejecutando:

```
sage: Pr1=Pi1(A)
sage: Pr2=Pi2(A)
```

El espacio $V_1 = \mathrm{im}(p_1)$ está generado por $v_1 = (-\sqrt{3}+3, -\sqrt{3})$ y $V_2 = \mathrm{im}(p_1)$ está generado por $v_2 = (\sqrt{3}+3, \sqrt{3})$. Hacemos un cambio de base para ver la representación matricial de $f(x, y) = (-x - 2y, -x + y)$ en la base $\{v_1, v_2\}$:

```
sage: v1=vector(K,[-r+3,-r])
sage: v2=vector(K,[r+3,r])
sage: C=column_matrix([v1,v2])
sage: B=C^(-1)*A*C
```

Note que si trabajamos directamente sobre los reales en Sage, en vez de pedirle que use el símbolo r para $\sqrt{3}$, tomará valores aproximados para $\sqrt{3}$. Esto lo puede verificar ejecutando

```
sage: t=PolynomialRing(RR, 't').gen()
sage: A=Matrix(RR,[[-1,-2],[-1,1]])
sage: P=A.charpoly('t')
sage: factor(P)
```

Para la pregunta *iv*) lo mejor es trabajar con $K = \mathbb{Q}[i]$ esto se logra definiendo K por

```
sage: K.<i> = QQ.extension(t^2+1)
```

Si usted trabaja directamente sobre los complejos, como con los reales, Sage tomará aproximaciones en la parte real y la parte compleja.

Solución

i) 1. Sea $\mathcal{C}$ la base canónica. La representación matricial de f en la base $\mathcal{C}$ es

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. El polinomio característico de f es

$$P_f(t) = (t-1)(t+1)(t^2-2)$$

3. Sean $R_1(t) = (t+1)(t^2-2)$, $R_2(t) = (t-1)(t^2-2)$ y $R_3(t) = (t-1)(t+1)$, entonces

$$\frac{1}{2}R_1(t) + \frac{-1}{2}R_2(t) = t^2 - 2$$

y

$$-(t^2-2) + R_3(t) = 1$$

así

$$\frac{-1}{2}R_1(t) + \frac{1}{2}R_2(t) + R_3(t) = 1.$$

Para

$$\begin{aligned} \Pi_1(t) &= \frac{-1}{2}R_1(t) \\ \Pi_2(t) &= \frac{1}{2}R_2(t) \\ \Pi_3(t) &= R_3(t) \end{aligned}$$

tenemos que $p_1 = \Pi_1(f)$, $p_2 = \Pi_2(f)$ y $p_3 = \Pi_3(f)$ son respectivamente las proyecciones sobre V_1, V_2 y $V3$ respecto a la descomposición $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$, donde

$$\begin{aligned} V_1 &= \ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4}) \\ V_2 &= \ker(f + \mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4}) \\ V_3 &= \ker(f^2 - 2\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4}) \end{aligned}$$

4. Tenemos

$$\begin{aligned} [p_1]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\Pi_1(f)]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \\ &= \Pi_1\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ [p_2]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\Pi_2(f)]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \\ &= \Pi_2\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [p_3]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\Pi_3(f)]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \\ &= \Pi_3\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

entonces $V_1 = \mathrm{im}(p_1) = \langle v_1 \rangle$, $V_2 = \mathrm{im}(p_2) = \langle v_2 \rangle$, y $V_3 = \mathrm{im}(p_3) = \langle v_3, v_4 \rangle$ con

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,1,0,1) \\ v_2 &= (1,-2,-1,0) \\ v_3 &= (-1,1,1,-1) \\ v_4 &= (0,1,0,0). \end{aligned}$$

Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ entonces

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} &= [\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \, [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \, [\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ii) 1. Sea $\mathcal{C}$ la base canónica. La representación matricial de f en la base $\mathcal{C}$ es

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. El polinomio característico de f es

$$P_f(t) = (t-1)(t+1)(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})$$

3. Sean $R_1(t) = (t+1)(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})$, $R_2(t) = (t-1)(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})$, $R_3(t) = (t-1)(t+1)(t-\sqrt{2})$, y $R_4(t) = (t-1)(t+1)(t+\sqrt{2})$, entonces

$$\frac{1}{2}R_1(t) + \frac{-1}{2}R_2(t) = (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2}),$$

$$(-t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2}) + R_3(t) = (t - sqrt2)$$

y

$$\frac{-\sqrt{2}t^2 - 4t - 3\sqrt{2}}{4}(t-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}R_4(t) = 1$$

así

$$\frac{-\sqrt{2}t^2 - 4t - 3\sqrt{2}}{4}(-t+\sqrt{2})\frac{1}{2}R_1(t) + \frac{-\sqrt{2}t^2 - 4t - 3\sqrt{2}}{4}(-t+\sqrt{2})\frac{-1}{2}R_2(t) + \frac{-\sqrt{2}t^2 - 4t - 3\sqrt{2}}{4}R_3(t) + \frac{\sqrt{2}}{4}R_4(t) = 1.$$

Para

$$\begin{aligned} \Pi_1(t) &= \frac{-\sqrt{2}t^2 - 4t - 3\sqrt{2}}{4}(-t+\sqrt{2})\frac{1}{2}R_1(t) \\ \Pi_2(t) &= \frac{-\sqrt{2}t^2 - 4t - 3\sqrt{2}}{4}(-t+\sqrt{2})\frac{-1}{2}R_2(t) \\ \Pi_3(t) &= \frac{-\sqrt{2}t^2 - 4t - 3\sqrt{2}}{4}R_3(t) \\ \Pi_4(t) &= \frac{\sqrt{2}}{4}R_4(t) \end{aligned}$$

tenemos que $p_1 = \Pi_1(f)$, $p_2 = \Pi_2(f)$, $p_3 = \Pi_3(f)$ y $p_4 = \Pi_4(f)$ son respectivamente las proyecciones sobre V_1, V_2, $V3$ y V_4 respecto a la descomposición $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4$, donde

$$\begin{aligned} V_1 &= \ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) \\ V_2 &= \ker(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) \\ V_3 &= \ker(f + \sqrt{2}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) \\ V_4 &= \ker(f - \sqrt{2}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) \end{aligned}$$

4. Tenemos

$$
\begin{aligned}
[p_1]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\Pi_1(f)]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \\
&= \Pi_1\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
[p_2]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\Pi_2(f)]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \\
&= \Pi_2\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
[p_3]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\Pi_3(f)]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \\
&= \Pi_3\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2+3\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2+\sqrt{2} & 2-4\sqrt{2} \\ 2+4\sqrt{2} & 2+2\sqrt{2} & -2 & -4-6\sqrt{2} \\ 2-3\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} & -2+\sqrt{2} \\ -2+3\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2+\sqrt{2} & 2-4\sqrt{2} \end{bmatrix} \\
[p_4]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\Pi_4(f)]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \\
&= \Pi_4\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2-3\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & 2+4\sqrt{2} \\ 2-4\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} & -2 & -4+6\sqrt{2} \\ 2+3\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} \\ -2-3\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & 2+4\sqrt{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

entonces $V_1 = \operatorname{im}(p_1) = \langle v_1\rangle$, $V_2 = \operatorname{im}(p_2) = \langle v_2\rangle$, $V_3 = \operatorname{im}(p_3) = \langle v_3\rangle$, y $V_4 = \operatorname{im}(p_4) = \langle v_4\rangle$con

$$
\begin{aligned}
v_1 &= (1,1,0,1) \\
v_2 &= (1,-2,-1,0) \\
v_3 &= (\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\
v_4 &= (-\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}).
\end{aligned}
$$

Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ entonces

$$
\begin{aligned}
[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} &= [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\,[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\,[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -2 & 2+2\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -2 & 2+2\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

iii) 1. Sea $\mathcal{C}$ la base canónica. La representación matricial de f en la base $\mathcal{C}$ es

$$
[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.
$$

2. El polinomio característico de f es

$$
P_f(t) = (t^2 - 2t + 2)(t^2 - 2t + 5)
$$

3. Sean $R_1(t) = t^2 - 2t + 5$ y $R_2(t) = t^2 - 2t + 2$, entonces

$$\frac{1}{3}R_1(t) + \frac{-1}{3}R_2(t) = 1.$$

Para

$$\begin{aligned}\Pi_1(t) &= \frac{1}{3}R_1(t)\\ \Pi_2(t) &= \frac{-1}{3}R_2(t)\end{aligned}$$

tenemos que $p_1 = \Pi_1(f)$ y $p_2 = \Pi_2(f)$ son respectivamente las proyecciones sobre V_1 y V_2 respecto a la descomposición $V = V_1 \oplus V_2$, donde

$$\begin{aligned}V_1 &= \ker(f^2 - 2f + 2\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4})\\ V_2 &= \ker(f^2 - 2f + 5\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4})\end{aligned}$$

4. Tenemos

$$\begin{aligned}[p_1]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\Pi_1(f)]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\\ &= \Pi_1\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right)\\ &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 2 & -2 & -1 & 0\\ 2 & -2 & -1 & 0\end{bmatrix}\\ [p_2]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\Pi_2(f)]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\\ &= \Pi_2\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right)\\ &= \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ -2 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

entonces $V_1 = \mathrm{im}(p_1) = \langle v_1, v_2 2\rangle$ y $V_2 = \mathrm{im}(p_2) = \langle v_3, v_4\rangle$ con

$$\begin{aligned}v_1 &= (1,0,1,1)\\ v_2 &= (1,1,0,0)\\ v_3 &= (1,0,2,1)\\ v_4 &= (1,1,0,1).\end{aligned}$$

Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ entonces

$$\begin{aligned}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} &= [\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\,[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\,[\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 3 & -4 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

iv) 1. Sea $\mathcal{C}$ la base canónica. La representación matricial de f en la base $\mathcal{C}$ es

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 3 & -4 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}.$$

2. El polinomio característico de f es

$$P_f(t) = \big(t - (1+i)\big)\big(t - (1-i)\big)\big(t - (1+2i)\big)\big(t - (1-2i)\big)$$

3. Sean $R_1(t)=\big(t-(1-i)\big)\big(t-(1+2i)\big)\big(t-(1-2i)\big)$, $R_2(t)=\big(t-(1+i)\big)\big(t-(1+2i)\big)\big(t-(1-2i)\big)$, $R_3(t)=\big(t-(1+i)\big)\big(t-(1-i)\big)\big(t-(1-2i)\big)$ y $R_4(t)=\big(t-(1+i)\big)\big(t-(1-i)\big)\big(t-(1-2i)\big)$ entonces

$$\frac{-i}{2}R_1(t)+\frac{i}{2}R_2(t)=\big(t-(1+2i)\big)\big(t-(1-2i)\big),$$

$$\frac{t-1+2i}{3}\big(t-(1+2i)\big)\big(t-(1-2i)\big)+\frac{-1}{3}R_3(t)=t-(1-2i)$$

y

$$\frac{it^2-4t+(4-2i)t-4-6i}{12}\big(t-(1-2i)\big)+\frac{-i}{12}R_4(t)=1$$

así

$$\frac{it^2-4t+(4-2i)t-4-6i}{12}\cdot\frac{t-1+2i}{3}\cdot\frac{-i}{2}R_1(t)+\frac{it^2-4t+(4-2i)t-4-6i}{12}\cdot\frac{t-1+2i}{3}\cdot\frac{i}{2}R_2(t)$$
$$+\frac{it^2-4t+(4-2i)t-4-6i}{12}\cdot\frac{-1}{3}R_3(t)+\frac{-i}{12}R_4(t)=1.$$

Para

$$\begin{aligned}\Pi_1(t)&=\frac{it^2-4t+(4-2i)t-4-6i}{12}\cdot\frac{t-1+2i}{3}\cdot\frac{-i}{2}R_1(t)\\ \Pi_2(t)&=\frac{it^2-4t+(4-2i)t-4-6i}{12}\cdot\frac{t-1+2i}{3}\cdot\frac{i}{2}R_2(t)\\ \Pi_3(t)&=\frac{it^2-4t+(4-2i)t-4-6i}{12}\cdot\frac{-1}{3}R_3(t)\\ \Pi_4(t)&=\frac{-i}{12}R_4(t)\end{aligned}$$

tenemos que $p_1=\Pi_1(f)$, $p_2=\Pi_2(f)$, $p_3=\Pi_3(f)$ y $p_4=\Pi_4(f)$ son respectivamente las proyecciones sobre V_1, V_2, $V3$ y V_4 respecto a la descomposición $V=V_1\oplus V_2\oplus V_3\oplus V_4$, donde

$$\begin{aligned}V_1&=\ker(f-(1+i)\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})\\ V_2&=\ker(f-(1-i)\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})\\ V_3&=\ker(f-(1+2i)\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})\\ V_4&=\ker(f-(1-2i)\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})\end{aligned}$$

4. Tenemos

$$
\begin{aligned}
[p_1]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\Pi_1(f)]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \\
&= \Pi_1\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3-i & 2i-2 & -1+i & -1-i \\ 1-2i & 2i & i & -1 \\ 2-i & -2 & -1 & -i \\ 2+i & -2 & -1 & -i \end{bmatrix} \\
[p_2]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\Pi_2(f)]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \\
&= \Pi_2\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3+i & -2i-2 & -1-i & -1+i \\ 1+2i & -2i & -i & -1 \\ 2+i & -2 & -1 & i \\ 2-i & -2 & -1 & i \end{bmatrix} \\
[p_3]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\Pi_3(f)]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \\
&= \Pi_3\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1-i & 1+i \\ -1+i & 1-i & -i & 1 \\ -2-2i & 2+2i & 2 & 2i \\ -2 & 2 & 1-i & 1+i \end{bmatrix} \\
[p_4]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\Pi_4(f)]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \\
&= \Pi_4\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1+i & 1-i \\ -1-i & 1+i & i & 1 \\ -2+2i & 2-2i & 2 & -2i \\ -2 & 2 & 1+i & 1-i \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

entonces $V_1 = \operatorname{im}(p_1) = \langle v_1 \rangle$, $V_2 = \operatorname{im}(p_2) = \langle v_2 \rangle$, $V_3 = \operatorname{im}(p_3) = \langle v_3 \rangle$, y $V_4 = \operatorname{im}(p_4) = \langle v_4 \rangle$con

$$
\begin{aligned}
v_1 &= (-1+i, i, -1, -1) \\
v_2 &= (-1-i, -i, -1, -1) \\
v_3 &= (1-i, -i, 2, 1-i) \\
v_4 &= (1+i, i, 2, 1+i).
\end{aligned}
$$

Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ entonces

$$
\begin{aligned}
[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} &= [\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\, [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\, [\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \\
&= \begin{bmatrix} -1+i & -1-i & 1-i & 1+i \\ i & -i & -i & i \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1-i & 1+i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1+i & -1-i & 1-i & 1+i \\ i & -i & -i & i \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1-i & 1+i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2i \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$