Álgebra Lineal 2 - Taller 4

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

Para cada una de los siguientes operadores:

i) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3)$ donde
$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 2z, -y, -2y + z),$$

ii) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3)$ donde
$$f(x, y, z) = (6x - 2y - 6z, 4x - 6z, 4x - 2y - 4z)$$
en la base canónica $\mathcal{C}$,

iii) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ donde
$$f(x, y, z, w) = (-2x - y + z, -x - 2y + z, -x - y, x - z - 2w)$$

1. Encuentre la representación matricial de f en la base canónica.
2. Encuentre la factorización del polinomio característico $P_f(t)$ como producto de potencias de polinomios irreducibles de $\mathbb{Q}[t]$:
$$P_f(t) = P_1(t)^{r_1} P_2(t)^{r_2}$$
donde cada $P_i(t) \in \mathbb{Q}[t]$ es irreducible.
3. Sean $V_i = \ker(P_i(f)^{r_i})$, $i = 1, 2$, y p_1, p_2 las proyecciones sobre V_1, V_2 respecto a la descomposición $V = V_1 \oplus V_2$. Encuentre polinomios $\Pi_1(t), \Pi_2(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tales que $\Pi_i(f) = p_i$, $i = 1, 2$.

Ejemplo

Sea
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular su polinomio característico en la variable t y su factorización ejecutamos:

```
sage: t=PolynomialRing(RationalField(), 't').gen()
sage: A=Matrix(QQ,[[2,1,-1],[0,2,0],[0,1,1]])
sage: P=A.charpoly('t')
sage: factor(P)
```

Vemos que $P_A(t) = (t-1)(t-2)^2$. Tenemos dos subespacios invariantes $V_1 = \ker(A - I_3)$ y $V_2 = \ker(A - 2\,I_3)$. Para obtener los polinomios $\Pi_1(t), \Pi_2(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tales que, para $i = 1, 2$, $\Pi_i(A)$ sea la proyección sobre V_i, ejecutamos

```
sage: P1=(t - 1)
sage: P2=(t - 2)^2
sage: P12,Q1,Q2=xgcd(P1,P2)
sage: Pi1=Q2*P2
sage: Pi2=Q1*P1
```

Las dos matrices de proyección $\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$, las calculamos ejecutando:

```
sage: Pr1=Pi1(A)
sage: Pr2=Pi2(A)
```

Para verificar que obtenemos dos matrices de proyecciones con las características deseadas ejecutamos:

```
sage: Pr1^2-Pr1
sage: Pr2^2-Pr2
sage: Pr1+Pr2
```

Solución

1. i) Sea $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica. La representación matricial de f en la base $\mathcal{C}$ es

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   ii) El polinomio característico de f es

$$P_f(t) = (t-1)(t+1)^2$$

   iii) Si $P_1(t) = t - 1$ y $P_2(t) = (t+1)^2$ entonces

$$\frac{-t-3}{4}P_1(t) + \frac{1}{4}P_2(t) = 1$$

   luego para

$$\Pi_1(t) = \frac{1}{4}P_2(t)$$
$$\Pi_2(t) = \frac{-t-3}{4}P_1(t)$$

   tenemos que $p_1 = \Pi_1(f)$ y $p_2 = \Pi_2(f)$ son respectivamente las proyecciones sobre V_1 y V_2 respecto a la descomposición $V = V_1 \oplus V_2$.

2. i) Sea $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica. La representación matricial de f en la base $\mathcal{C}$ es

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -6 & -2 & -6 \\ 4 & 0 & -6 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

   ii) El polinomio característico de f es

$$P_f(t) = (t+2)(t-2)^2$$

   iii) Si $P_1(t) = t + 2$ y $P_2(t) = (t-2)^2$ entonces

$$\frac{-t+6}{16}P_1(t) + \frac{1}{16}P_2(t) = 1$$

   luego para

$$\Pi_1(t) = \frac{1}{16}P_2(t)$$
$$\Pi_2(t) = \frac{-t+6}{16}P_1(t)$$

   tenemos que $p_1 = \Pi_1(f)$ y $p_2 = \Pi_2(f)$ son respectivamente las proyecciones sobre V_1 y V_2 respecto a la descomposición $V = V_1 \oplus V_2$.

3. i) Sea $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica. La representación matricial de f en la base $\mathcal{C}$ es

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

   ii) El polinomio característico de f es

$$P_f(t) = (t+1)^2(t+2)^2$$

   iii) Si $P_1(t) = (t+1)^2$ y $P_2(t) = (t+2)^2$ entonces

$$(2t+5)P_1(t) + (-2t-1)P_2(t) = 1$$

   luego para

$$\Pi_1(t) = (-2t-1)P_2(t)$$
$$\Pi_2(t) = (2t+5)P_1(t)$$

   tenemos que $p_1 = \Pi_1(f)$ y $p_2 = \Pi_2(f)$ son respectivamente las proyecciones sobre V_1 y V_2 respecto a la descomposición $V = V_1 \oplus V_2$.