Álgebra Lineal 2 - Taller 3

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

Encuetre la representación matricial de cada una de los siguientes operadores en la base indicada:

i) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3)$ donde

$$f(x, y, z) = (9x - 4z, 18x - y - 4z, \frac{15}{2}x - \frac{3}{2}y + z)$$

en la base canónica $\mathcal{C}$.

ii) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ donde

$$f(x, y, z, w) = (x - y + w, -x - z + 2w, 2x - y - z - w, 2x - y)$$

en la base canónica $\mathcal{C}$.

iii) $p_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3)$ donde f es la proyección sobre el subespacio $V_1 = \langle (1, 1, 1), (0, 1, 1) \rangle$ con núcleo $V_2 = \langle (0, 0, 1) \rangle$ en la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

iv) $p_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3)$ donde p_1 es la proyección sobre el subespacio $V_1 = \langle (1, 1, 1), (0, 1, 1) \rangle$ con núcleo $V_2 = \langle (0, 0, 1) \rangle$, en la base canónica $\mathcal{C}$.

v) $p_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3)$ donde p_1 es la proyección sobre el subespacio $V_2 = \langle (0, 0, 1) \rangle$ con núcleo $V_1 = \langle (1, 1, 1), (0, 1, 1) \rangle$ en la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

vi) $p_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3)$ donde p_2 es la proyección sobre el subespacio $V_2 = \langle (0, 0, 1) \rangle$ con núcleo $V_1 = \langle (1, 1, 1), (0, 1, 1) \rangle$ en la base canónica $\mathcal{C}$.

vii) $p \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3)$ donde p es la proyección sobre el subespacio $V_1 = \langle (1, 5, 2) \rangle$ con núcleo $V_2 = \langle (2, 6, 3), (3, 7, 3) \rangle$ en la base canónica $\mathcal{C}$.

Ejemplo

Para construir en SageMath la matriz cuyas columnas son las coordenadas en la base canónica de los vectores v_1, v_2, v_3 donde

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (0, 1, 1), \quad v_3 = (0, 0, 1)$$

ejecutamos:

```
sage: v1=vector(QQ,[1,1,1])
sage: v2=vector(QQ,[0,1,1])
sage: v3=vector(QQ,[0,0,1])
sage: A=column_matrix([v1,v2,v3])
```

o directamente:

```
sage: A=Matrix([[1,0,0],[1,1,0],[1,1,1]])
```

para calcular la inversa ejecutamos:

```
sage: A^(-1)
```

y podemos verificar multiplicándolas:

```
sage: A^(-1)*A
```

Solución

i) Sea $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica. Como

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (9, 18, \frac{15}{2}) \\ f(e_2) &= (0, -1, -\frac{3}{2}) \\ f(e_3) &= (-4, -4, 1) \end{aligned}$$

entonces la representación matricial de f en la base $\mathcal{C}$ es

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -4 \\ 18 & -1 & -4 \\ \frac{15}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

ii) Sea $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canónica. Como

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1, -1, 2, 2) \\ f(e_2) &= (-1, 0, -1, -1) \\ f(e_3) &= (0, -1, -1, 0) \\ f(e_4) &= (1, 2, -1, 0) \end{aligned}$$

entonces la representación matricial de f en la base $\mathcal{C}$ es

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

iii) Sean $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$, de forma que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Como

$$\begin{aligned} p_1(v_1) &= v_1 \\ p_1(v_2) &= v_2 \\ p_1(v_3) &= 0 \end{aligned}$$

entonces la representación matricial de p_1 en la base $\mathcal{B}$ es

$$[p_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

iv) Sean $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$, de forma que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. La matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a la base canónica $\mathcal{C}$ es

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando la representación matricial de p_1 en la base $\mathcal{B}$ y la matriz de cambio de base podemos obtener la representación matricial de p_1 en la base canónica:

$$\begin{aligned} [p_1]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \, [p_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \, [\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^3}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

v) Sean $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,1)$ y $v_3 = (0,0,1)$, de forma que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Como

$$\begin{aligned} p_2(v_1) &= 0 \\ p_2(v_2) &= 0 \\ p_2(v_3) &= v_3 \end{aligned}$$

entonces la representación matricial de p_2 en la base $\mathcal{B}$ es

$$[p_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

vi) Sean $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,1)$ y $v_3 = (0,0,1)$, de forma que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. La matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a la base canónica $\mathcal{C}$ es

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando la representación matricial de p_2 en la base $\mathcal{B}$ y la matriz de cambio de base podemos obtener la representación matricial de p_2 en la base canónica:

$$\begin{aligned} [p_2]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \, [p_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \, [\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^3}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

vii) Sean $v_1 = (1,5,2)$, $v_2 = (2,6,3)$ y $v_3 = (3,7,3)$. Como los tres vectores son linealmente independientes entonces forman una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} p(v_1) &= v_1 \\ p(v_2) &= v_2 \\ p(v_3) &= 0 \end{aligned}$$

entonces la representación matricial de p en la base $\mathcal{B}$ es

$$[p]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a la base canónica $\mathcal{C}$ es

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Usando la representación matricial de p en la base $\mathcal{B}$ y la matriz de cambio de base podemos obtener la representación matricial de p en la base canónica:

$$\begin{aligned} [p]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \, [p]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \, [\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^3}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -5 & -3 & 12 \\ -21 & -3 & 28 \\ -9 & -3 & 16 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$