Parcial II- Solución
MATE 1107

1. Tomamos $\mathbb{C}^4$ con el producto hermítico definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2)\rangle = x_1\overline{x_2} + y_1\overline{y_2} + z_1\overline{z_2} + w_1\overline{w_2},$$

y f el operador de $\mathbb{C}^4$ definido por

$$f(x, y, z, w) = \frac{1}{4}(3x+iy+z+iw, -ix+3y+iz-w, x-iy+3z-iw, -ix-y+iz+3w).$$

a) La representación matricial de f en la base canónica, la cual es ortonormal, es

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & i & 1 & i \\ -i & 3 & i & -1 \\ 1 & -i & 3 & -i \\ -i & -1 & i & 3 \end{bmatrix}$$

Ahora, $A^2 = A$, luego $f^2 = f$ y así f es una proyección. Por otro lado como $A^* = A$, para todo $v \in \mathbb{C}^4$, si $\mathbf{x}$ es su representación en coordenadas de la base canónica

$$\begin{aligned} \langle v - f(v), f(v)\rangle &= (\mathbf{x} - A\mathbf{x})^* A\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^* A\mathbf{x} - \mathbf{x}^* A^* A\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^* A\mathbf{x} - \mathbf{x}^* AA\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^* A\mathbf{x} - \mathbf{x}^* A\mathbf{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

luego f es una proyección ortogonal.

b) Como f es una proyección sus valores propios son 1 y 0, más aún la proyección es sobre el espacio generado por sus valores propios asociados a 1. Entonces

$$V_1 = \{v \in \mathbb{C}^4 \mid v = f(v)\} = \{v \in \mathbb{C}^4 \mid 0 = (\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4} - f)(v)\}$$

Resolvemos entonces el sistema

$$(I - A)\mathbf{x} = 0,$$

es decir, el sistema cuya matriz extendida asociada es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1/4 & -i/4 & -1/4 & -i/4 & 0 \\ i/4 & 1/4 & -i/4 & 1/4 & 0 \\ -1/4 & i/4 & 1/4 & i/4 & 0 \\ i/4 & 1/4 & -i/4 & 1/4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -i & -1 & -i & 0 \\ i & 1 & -i & 1 & 0 \\ -1 & i & 1 & i & 0 \\ i & 1 & -i & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -i & -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

luego

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4 \mid x - iy - z - iw = 0\} \\ &= \mathrm{Sp}(\{(1,0,1,0),(0,1,0,-1),(1,-i,-1,-i)\}) \\ &= \mathrm{Sp}(\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1), \frac{1}{2}(1,-i,-1,-i)\}) \end{aligned}$$

Por otro lado el complemento ortogonal de V_1, como f es la proyección ortogonal de sobre V_1, corresponde a

$$V_2 = \{v \in \mathbb{C}^4 \mid f(v) = 0\}.$$

Resolvemos entonces el sistema

$$A\mathbf{x} = 0$$

es decir

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & i & 1 & i & 0 \\ -i & 3 & i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 3 & -i & 0 \\ -i & -1 & i & 3 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & i & 1 & i & 0 \\ 3 & 9i & -3 & -3i & 0 \\ 3 & -3i & 9 & -3i & 0 \\ 3 & -3i & -3 & 9i & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & i & 1 & i & 0 \\ 0 & 8i & -4 & -4i & 0 \\ 0 & -4i & 8 & -4i & 0 \\ 0 & -4i & -4 & 8i & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & i & 1 & i & 0 \\ 0 & 2i & -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6i & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6i & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & i & 1 & i & 0 \\ 0 & 2i & -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Así

$$V_2 = \mathrm{Sp}\{(-i,1,i,1)\}$$

2. Si V es un espacio unitario de dimensión finita, f un operador de V y $T = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal de V. Entonces la ij-ésima entrada de $\Big[f\Big]_T^T$ es

$$\langle f(u_j), u_i\rangle$$

y la de $\Big[f^*\Big]_T^T$ es

$$\langle f^*(u_j), u_i\rangle = \langle u_j, f(u_i) = \overline{\langle f(u_i), u_j\rangle}$$

. Así $f = f^*$ si y solo si

$$\langle f(u_j), u_i \rangle = \overline{\langle f(u_i), u_j \rangle}$$

, es decir si y solo si la ij-ésima entrada de $\Big[f\Big]_T^T$ es la conjugada de la ji-ésima entrada de $\Big[f^*\Big]_T^T$, es decir si y solo si $\Big[f\Big]_T^T$ es hermítica.