Álgebra Lineal 2 - Parcial No. 2

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

miércoles, noviembre 6 de 2019

Esto es un examen individual.

Importante: Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma **clara y ordenada** el procedimiento **completo** que permite llegar a la respuesta.

Duración: 75 minutos - Máxima nota: 30 puntos

1. **[/15pts]** Considere $\mathbb{R}^4$ con el producto interno definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + w_1w_2.$$

Sea f el operador de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) =& \frac{1}{4}\Big(3x + y + z + w,\ x + 3y - z - w, \\ & x - y + 3z - w,\ x - y - z + 3w\Big). \end{aligned}$$

   (a) **[/1pt]** Encuentre la representación matricial de f en la base canónica.
   (b) **[/3pts]** Demuestre que f es una proyección ortogonal.
   (c) **[/1pt]** Sea g la proyección ortogonal sobre el completo ortogonal de $\operatorname{im}(f)$. Encuentre $g(x, y, z, w)$.
   (d) **[/4pts]** Encuentre una base ortonormal de $\operatorname{im}(f)$
   (e) **[/2pts]** Encuentre una base ortonormal de $\ker(f)$.
   (f) **[/2pts]** Demuestre que f es diagonalizable.
   (g) **[/2pts]** Encuentre una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ respecto a la cual la representación matricial de f es una matriz diagonal.

2. **[/15pts]** Considere $\mathbb{C}^4$ con el producto hermítico definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \rangle = x_1\overline{x_2} + y_1\overline{y_2} + z_1\overline{z_2} + w_1\overline{w_2}.$$

Sea f el operador de $\mathbb{C}^4$ definido por

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) =& \Big(2x - y - 3iz - 2iw,\ -x + 5y + iw, \\ & 3ix + 3z - 3w,\ 2ix - iy - 3z + 2w\Big). \end{aligned}$$

   (a) **[/4pts]** Demuestre que f es diagonalizable y que sus espacios propios son dos a dos ortogonales.
   (b) **[/6pts]** Encuentre una base ortonormal para cada espacio propio de f.
   (c) **[/3pts]** Encuentre la representación matricial en la base canónica de la proyección ortogonal sobre cada uno de los espacios propios de f.
   (d) **[/1pt]** Escriba f como combinación lineal de proyecciones ortogonales sobre subespacios dos a dos ortogonales.
   (e) **[/1pt]** Encuentre una base ortonormal de $\mathbb{C}^4$ respecto a la cual la representación matricial de f es una matriz diagonal.