Álgebra Lineal 2 - Parcial No. 2

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

jueves, noviembre 22 de 2018

Esto es un examen individual.

Importante: Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma **clara y ordenada** el procedimiento **completo** que permite llegar a la respuesta.

Duración: 75 minutos - Máxima nota: 30 puntos

1. **[/15pts]** Considere $\mathbb{C}^4$ con el producto hermítico definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \rangle = x_1\overline{x_2} + y_1\overline{y_2} + z_1\overline{z_2} + w_1\overline{w_2}.$$

Sea f el operador de $\mathbb{C}^4$ definido por

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) =& \frac{1}{6}\Big(2x + (-1+i)y + 2z + (1+i)w,\ (-1-i)x + 4y + (-1-i)z + 2iw, \\ & 2x + (-1+i)y + 2z + (1+i)w,\ (1-i)x - 2iy + (1-i)z + 4w\Big). \end{aligned}$$

   (a) **[/1pt]** Encuentre la representación matricial de f en la base canónica.
   (b) **[/2pts]** Demuestre que f es una proyección ortogonal.
   (c) **[/2pts]** Sea g la proyección ortogonal sobre el completo ortogonal de $\ker(f)$. Encuentre $g(x, y, z, w)$.
   (d) **[/3pts]** Encuentre una base ortogonal de $\mathrm{im}(f)$
   (e) **[/3pts]** Encuentre una base ortogonal de $\ker(f)$.
   (f) **[/2pts]** Demuestre que f es diagonalizable.
   (g) **[/2pts]** Encuentre una base ortogonal de $\mathbb{C}^4$ respecto a la cual la representación matricial de f es una matriz diagonal.

2. **[/15pts]** Considere $\mathbb{C}^4$ con el producto hermítico definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \rangle = x_1\overline{x_2} + y_1\overline{y_2} + z_1\overline{z_2} + w_1\overline{w_2}.$$

Sea f el operador de $\mathbb{C}^4$ definido por

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) =& \Big(x - 3y - 3iz + 3iw,\ -3x + y - 3iz + 3iw, \\ & 3ix + 3iy + z + 3w,\ -3ix - 3iy + 3z + w\Big). \end{aligned}$$

   (a) **[/2pts]** Demuestre que f es diagonalizable.
   (b) **[/2pts]** Demuestre que los espacios propios de f son dos a dos ortogonales.
   (c) **[/4pts]** Encuentre una base ortonormal para cada espacio propio de f.
   (d) **[/2pts]** Encuentre la representación matricial en la base canónica de la proyección ortogonal sobre cada uno de los espacios propios de f.
   (e) **[/2pts]** Escriba f como combinación lineal de proyecciones ortogonales sobre subespacios dos a dos ortogonales.
   (f) **[/3pts]** Encuentre una base ortogonal de $\mathbb{C}^4$ respecto a la cual la representación matricial de f es una matriz diagonal.