Álgebra Lineal 2 - Parcial No. 1

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

miércoles, 12 de marzo de 2019

Esto es un examen individual.

Importante: Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma **clara y ordenada** el procedimiento **completo** que permite llegar a la respuesta.

Duración: 75 minutos - Máxima nota: 30 puntos

1. **[/8pts]** Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^6, \mathbb{Q}^6)$ definido por

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (&3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 3x_6,\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 3x_6, \\ &2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 + 2x_6,\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 3x_6, \\ &2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 + 2x_6,\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 2x_6) \end{aligned}$$

   (a) **[/1pt]** Encuentre el grado de nilpotencia de f.

   (b) **[/3pts]** Encuentre, sin calcular una base de Jordan, la forma normal de Jordan de f.

   (c) **[/4pts]** Encuentre una base de Jordan $\mathcal{B}$ para f tal que $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ tenga la forma encontrada en (b).

2. **[/22pts]** Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^6, \mathbb{Q}^6)$ definido por

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = (&4x_1 - 6x_2 - 6x_3 - x_4 + 4x_5 + 9x_6,\ -x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 + 4x_5 + 9x_6, \\ &-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 + 8x_6,\ -2x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 8x_6, \\ &x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 + 11x_6,\ -5x_2 - 5x_3 + 10x_5 + 5x_6) \end{aligned}$$

   (a) **[/1pt]** Encuentre la representación matricial de f en la base canónica.

   (b) **[/1pt]** Encuentre la factorización del polinomio característico $P_f(t)$ como producto de potencias de polinomios irreducibles de $\mathbb{Q}[t]$:

$$P_f(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t)^{r_i}$$

   donde cada $P_i(t) \in \mathbb{Q}[t]$ es irreducible.

   (c) **[/4pts]** Sean $V_i = \ker\left(P_i(f)^{r_i}\right)$, $i = 1, \ldots, n$, y $p_1, \ldots, p_n$ las proyecciones sobre $V_1, \ldots, V_n$ respecto a la descomposición $\mathbb{Q}^6 = \bigoplus_{i=1}^n V_i$. Encuentre polinomios $\Pi_1(t), \ldots, \Pi_n(t) \in K[t]$ tales que $\Pi_i(f) = p_i$, $i = 1, \ldots, n$.

   (d) **[/1pt]** Encuentre las representaciones matriciales de p_i, $i = 1, \ldots, n$, en la base canónica.

   (e) **[/4pts]** Encuentre, sin calcular una base de Jordan, la forma normal de Jordan de f.

   (f) **[/8pts]** Encuentre una base de Jordan $\mathcal{B}$ para f tal que $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ tenga la forma encontrada en (e).

   (g) **[/3pts]** Encuentre polinomios $P_D(t), P_N(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tales que $f_D = P_D(f)$ es diagonalizable, $f_N = P_n(f)$ es nilpotente y $f = f_D + f_N$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de f.