Álgebra Lineal 2 - Parcial No. 1

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

miércoles, 12 de marzo de 2019

Esto es un examen individual.

Importante: Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma **clara y ordenada** el procedimiento **completo** que permite llegar a la respuesta.

Duración: 75 minutos - Máxima nota: 30 puntos

1. **[/23pts]** Sea $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^6, \mathbb{Q}^6)$ definido por

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = &(8x_1 + x_2 - 13x_3 + 8x_4 - x_5,\ 31x_1 + 6x_2 - 63x_3 + 29x_4 - x_5 + x_6, \\ &11x_1 + x_2 - 17x_3 + 9x_4 - x_5,\ 12x_1 + x_2 - 17x_3 + 8x_4 - x_5, \\ &-12x_1 + 14x_3 - 2x_4 + 3x_5, -15x_1 - 6x_2 + 39x_3 - 15x_4) \end{aligned}$$

   (a) **[/1pt]** Encuentre la representación matricial de f en la base canónica.

   (b) **[/1pt]** Encuentre la factorización del polinomio característico $P_f(t)$ como producto de potencias de polinomios irreducibles de $\mathbb{Q}[t]$:

$$P_f(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t)^{r_i}$$

   donde cada $P_i(t) \in \mathbb{Q}[t]$ es irreducible.

   (c) **[/7pts]** Sean $V_i = \ker(P_i(f)^{r_i})$, $i = 1, \ldots, n$, y $p_1, \ldots, p_n$ las proyecciones sobre $V_1, \ldots, V_n$ respecto a la descomposición $\mathbb{Q}^6 = \bigoplus_{i=1}^n V_i$. Encuentre polinomios $\Pi_1(t), \ldots, \Pi_n(t) \in K[t]$ tales que $\Pi_i(f) = p_i$, $i = 1, \ldots, n$.

   (d) **[/2pts]** Encuentre las representaciones matriciales de p_i, $i = 1, \ldots, n$, en la base canónica.

   (e) **[/5pts]** Encuentre la forma normal de Jordan de f.

   (f) **[/7pts]** Encuentre una base de Jordan $\mathcal{B}$ para f tal que $\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ tiene la forma encontrada en (e).

2. **[/7pts]** Sea $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^6, \mathbb{Q}^6)$ definido por

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = &(-11x_1 - 3x_2 + 24x_3 - 9x_4 + x_5 - x_6,\ -14x_1 - 4x_2 + 30x_3 - 12x_4 + x_5, \\ &-10x_1 - 3x_2 + 22x_3 - 8x_4 + x_5 - x_6,\ -6x_1 - 2x_2 + 13x_3 - 4x_4 + x_5 - x_6, \\ &-2x_1 + 4x_3 - 2x_4, -17x_1 - 6x_2 + 41x_3 - 15x_4 + x_5 - 3x_6) \end{aligned}$$

   Encuentre una base de Jordan $\mathcal{B}$ de $\mathbb{Q}^6$ para f y la matriz $\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.