Álgebra Lineal 2 - Parcial No. 1

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

jueves, septiembre 27 de 2018

Esto es un examen individual.

Importante: Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma **clara y ordenada** el procedimiento **completo** que permite llegar a la respuesta.

Duración: 75 minutos - Máxima nota: 30 puntos

1. **[/23pts]** Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^5, \mathbb{Q}^5)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ está dada por

   $$(4x_1-24x_2-8x_3+4x_4-2x_5, 3x_2-x_4, x_1-14x_2-2x_3+4x_4-x_5, x_1-3x_2-2x_3+x_4, 2x_1-9x_2-4x_3+x_4+x_5).$$

   (a) **[/1pt]** Encuentre la representación matricial de f en la base canónica.

   (b) **[/1pt]** Encuentre la factorización del polinomio característico $P_f(t)$ como producto de potencias de polinomios irreducibles de $\mathbb{Q}[t]$:

   $$P_f(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t)^{r_i}$$

   donde cada $P_i(t) \in \mathbb{Q}[t]$ es irreducible.

   (c) **[/7pts]** Sean $V_i = \ker(P_i(f)^{r_i})$, $i = 1, \ldots, n$, y $p_1, \ldots, p_n$ las proyecciones sobre $V_1, \ldots, V_n$ respecto a la descomposición $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$. Encuentre polinomios $\Pi_1(t), \ldots, \Pi_n(t) \in K[t]$ tales que $\Pi_i(f) = p_i$, $i = 1, \ldots, n$.

   (d) **[/2pts]** Encuentre las representaciones matriciales de p_i, $i = 1, \ldots, n$, en la base canónica.

   (e) **[/3pts]** Encuentre polinomios $P_D(t), P_N(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tales que $f_D = P_D(f)$ es diagonalizable, $f_N = P_n(f)$ es nilpotente y $f = f_D + f_N$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de f.

   (f) **[/2pts]** Encuentre la representación matricial de f_D y de f_N en la base canónica.

   (g) **[/7pts]** Encuentre una base de Jordan $\mathcal{B}$ de V para f y las matrices

   $$\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}, \quad \left[f_D\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}, \quad \left[f_N\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}.$$

2. **[/7pts]** Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^5, \mathbb{Q}^5)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ está dada por

   $$(x_1-5x_2-2x_3+x_4+x_5, -x_1+4x_2+2x_3, 3x_1-13x_2-6x_3+x_4, -x_1+4x_2+2x_3, -x_1+5x_2+2x_3-x_4+x_5).$$

   Encuentre una base de Jordan $\mathcal{B}$ de V para f y la matriz $\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.