Álgebra Lineal 2 - Examen Final

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

viernes, 30 de noviembre de 2019

Esto es un examen individual.

Importante: Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma **clara y ordenada** el procedimiento **completo** que permite llegar a la respuesta.

Duración: 110 minutos - Máxima nota: 30 puntos

1. **[/15pts]** Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^5, \mathbb{Q}^5)$ definido por

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \quad = \quad & \frac{1}{4}(-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 2x_5, \\ & -8x_1 + 4x_3 + 4x_5, \\ & -8x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 4x_5, \\ & -7x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5, \\ & -7x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \end{aligned}$$

   (a) **[/5pts]** Encuentre polinomios $P_D(t), P_N(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tales que $f_D = P_D(f)$ es diagonalizable, $f_N = P_n(f)$ es nilpotente y $f = f_D + f_N$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de f.

   (b) **[/5pts]** Encuentre la forma de Jordan de f.

   (c) **[/5pts]** Encuentre una base de Jordan para f.

2. **[/15pts]** Sea (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y (e^1, e^2, e^3, e^4) la base dual. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   y $s \in T^{(0,2)}(\mathbb{R}^4)$ definida por

$$s(x^i e_i, y^j e_j) = a_{ij} x^i y^j.$$

   (a) **[/10pt]** Encuentre $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ y una base (f_1, f_2, f_3, f_4) de $\mathbb{R}^4$ tal que si (f^1, f^2, f^3, f^4) es la base dual entonces

$$s = c_1 f^1 \otimes f^1 + c_2 f^2 \otimes f^2 + c_3 f^3 \otimes f^3 + c_4 f^4 \otimes f^4.$$

   (b) **[/5pts]** Encuentre una base (E_1, E_2, E_3, E_4) de $\mathbb{R}^4$ tal que si (E^1, E^2, E^3, E^4) es la base dual entonces

$$s = \varepsilon_1 E^1 \otimes E^1 + \varepsilon_2 E^2 \otimes E^2 + \varepsilon_3 E^3 \otimes E^3 + \varepsilon_4 E^4 \otimes E^4$$

   con $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ para $i = 1, 2, 3, 4$.