

Álgebra Lineal 2 - Examen Final

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

martes, 28 de mayo de 2019

Esto es un examen individual.

Importante: Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma **clara y ordenada** el procedimiento **completo** que permite llegar a la respuesta.

Duración: 165 minutos - Máxima nota: 30 puntos

1. [/10pts] Sea $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^5, \mathbb{Q}^5)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ está dada por

$$(6x_1 - 26x_2 - 12x_3 + 4x_4 - 4x_5, x_1 - 9x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5, 9x_2 + 2x_3, -6x_2 - x_3 + 2x_4, -x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5).$$

Sea

$$P_f(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t)^{r_i}$$

la factorización del polinomio característico de f como producto de potencias de polinomios irreducibles de $\mathbb{Q}[t]$:

- (a) [/3pts] Sean $V_i = \ker(P_i(f)^{r_i})$, $i = 1, \dots, n$, y p_1, \dots, p_n las proyecciones sobre V_1, \dots, V_n respecto a la descomposición $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$. Encuentre polinomios $\Pi_1(t), \dots, \Pi_n(t) \in K[t]$ tales que $\Pi_i(f) = p_i$, $i = 1, \dots, n$.
- (b) [/1pt] Encuentre las representaciones matriciales de p_i , $i = 1, \dots, n$, en la base canónica.
- (c) [/2pts] Encuentre polinomios $P_D(t), P_N(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tales que $f_D = P_D(f)$ es diagonalizable, $f_N = P_N(f)$ es nilpotente y $f = f_D + f_N$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de f .
- (d) [/4pts] Encuentre una base de Jordan \mathcal{B} de V para f y las matrices

$$\begin{bmatrix} f \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \begin{bmatrix} f_D \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \begin{bmatrix} f_N \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

2. [/10pts] Considere \mathbb{C}^4 con el producto hermitico definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \rangle = x_1 \bar{x}_2 + y_1 \bar{y}_2 + z_1 \bar{z}_2 + w_1 \bar{w}_2.$$

Sea f el operador de \mathbb{C}^4 definido por

$$f(x, y, z, w) = (3x + 3iy + 3iw, -3ix + 3y - 3w, z, -3ix - 3y + 3w).$$

- (a) [/1pt] Demuestre que f es diagonalizable y que los espacios propios de f son dos a dos ortogonales.
- (b) [/3pts] Encuentre una base ortonormal para cada espacio propio de f .
- (c) [/3pts] Encuentre la representación matricial en la base canónica de la proyección ortogonal sobre cada uno de los espacios propios de f y escriba f como combinación lineal de proyecciones ortogonales sobre subespacios dos a dos ortogonales.
- (d) [/3pts] Encuentre una base ortogonal de \mathbb{C}^4 respecto a la cual la representación matricial de f es una matriz diagonal.

3. [/5pts] Sea (e_1, e_2, e_3) la base canónica de \mathbb{R}^3 y (e^1, e^2, e^3) la base dual. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

y $s \in T^{(0,2)}(\mathbb{R}^3)$ definida por

$$s(x^i e_i, y^j e_j) = a_{ij} x^i y^j.$$

- (a) [/1pt] Encuentre una base (f_1, f_2, f_3) de \mathbb{R}^3 formada por vectores propios de A .
- (b) [/2pts] Demuestre que s define un producto interno en \mathbb{R}^3 . (Ayuda: calcule $s(x^i f_i, y^j f_j)$)
- (c) [/1pts] Encuentre una base (E_1, E_2, E_3) ortonormal respecto al producto interno s .
- (d) [/1pts] Sea (E^1, E^2, E^3) la base dual de (E_1, E_2, E_3) , escriba s como una combinación lineal de los elementos de la base $\{E^i \otimes E^j\}$.

4. [/5pts] Sea (e_1, e_2, e_3) la base canónica de \mathbb{R}^3 y (e^1, e^2, e^3) la base dual. Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$ la matriz

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

y $s \in T^{(0,2)}(\mathbb{R}^3)$ definida por

$$s(x^i e_i, y^j e_j) = a_{ij} x^i y^j.$$

- (a) [/1pt] Encuentre una base (f_1, f_2, f_3) de \mathbb{R}^3 formada por vectores propios de A .
- (b) [/2pts] Sea (f^1, f^2, f^3) la base dual de (f_1, f_2, f_3) , escriba s como una combinación lineal de los elementos de la base $f^i \otimes f^j$.
- (c) [/2pts] Encuentre una base (E_1, E_2, E_3) tal que si (E^1, E^2, E^3) es la base dual, entonces

$$s = \varepsilon_1 E^1 \otimes E^1 + \varepsilon_2 E^2 \otimes E^2 + \varepsilon_3 E^3 \otimes E^3$$

con $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ para $i = 1, 2, 3$.