Álgebra Lineal 2 - Examen Final

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

sábado, diciembre 1 de 2018

Esto es un examen individual.

Importante: Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma **clara y ordenada** el procedimiento **completo** que permite llegar a la respuesta.

Duración: 110 minutos - Máxima nota: 30 puntos

1. **[/10pts]** Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^5, \mathbb{Q}^5)$ donde $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ está dada por

   $(-3x_1+28x_2+10x_3-2x_4+2x_5, -x_2, -x_1+14x_2+4x_3-x_4+x_5, x_1-4x_2-2x_3-x_4, -2x_1+11x_2+4x_3-3x_4+2x_5)$.

   Sea
   $$P_f(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t)^{r_i}$$
   la factorización del polinomio característico de f como producto de potencias de polinomios irreducibles de $\mathbb{Q}[t]$:

   (a) **[/3pts]** Sean $V_i = \ker(P_i(f)^{r_i})$, $i = 1, \dots, n$, y $p_1, \dots, p_n$ las proyecciones sobre $V_1, \dots, V_n$ respecto a la descomposición $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$. Encuentre polinomios $\Pi_1(t), \dots, \Pi_n(t) \in K[t]$ tales que $\Pi_i(f) = p_i$, $i = 1, \dots, n$.

   (b) **[/1pt]** Encuentre las representaciones matriciales de p_i, $i = 1, \dots, n$, en la base canónica.

   (c) **[/2pts]** Encuentre polinomios $P_D(t), P_N(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tales que $f_D = P_D(f)$ es diagonalizable, $f_N = P_n(f)$ es nilpotente y $f = f_D + f_N$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de f.

   (d) **[/4pts]** Encuentre una base de Jordan $\mathcal{B}$ de V para f y las matrices
   $$\big[f\big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}, \quad \big[f_D\big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}, \quad \big[f_N\big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}.$$

2. **[/10pts]** Considere $\mathbb{C}^4$ con el producto hermítico definido por
   $$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \rangle = x_1\overline{x_2} + y_1\overline{y_2} + z_1\overline{z_2} + w_1\overline{w_2}.$$
   Sea f el operador de $\mathbb{C}^4$ definido por
   $$f(x, y, z, w) = \Big(3iz + 3iw,\ 9y,\quad -3ix - 3w,\ -3ix - 3z\Big).$$

   (a) **[/1pt]** Demuestre que f es diagonalizable y que los espacios propios de f son dos a dos ortogonales.

   (b) **[/3pts]** Encuentre una base ortonormal para cada espacio propio de f.

   (c) **[/3pts]** Encuentre la representación matricial en la base canónica de la proyección ortogonal sobre cada uno de los espacios propios de f y escriba f como combinación lineal de proyecciones ortogonales sobre subespacios dos a dos ortogonales.

   (d) **[/3pts]** Encuentre una base ortogonal de $\mathbb{C}^4$ respecto a la cual la representación matricial de f es una matriz diagonal.

3. **[/5pts]** Considere el mapa bilineal $\sigma : \mathbb{Q}^4 \times \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}$ definido por

$$\sigma\Big((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)\Big) = \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} x_i y_j$$

donde $(a_{ij})_{i,j=1}^4$ es la matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) **[/1pt]** Demuestre que σ define un producto simpléctico.

   (b) **[/4pts]** Encuentre una base de Darboux para σ.

4. **[/5pts]** Sea (e_1, e_2, e_3) la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y (e^1, e^2, e^3) la base dual. Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$ la matriz

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

y $s \in T^{(0,2)}(\mathbb{R}^3)$ definida por

$$s(x^i e_i, y^i e_i) = a_{ij} x^i y^j.$$

   (a) **[/1pt]** Encuentre una base (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A.

   (b) **[/2pts]** Sea (f^1, f^2, f^3) la base dual de (f_1, f_2, f_3), escriba s como una combinación lineal de los elementos de la base $f^i \otimes f^j$.

   (c) **[/2pts]** Encuentre una base (E_1, E_2, E_3) tal que si (E^1, E^2, E^3) es la base dual, entonces

$$s = \varepsilon_1 E^1 \otimes E^1 + \varepsilon_2 E^2 \otimes E^2 + \varepsilon_3 E^3 \otimes E^3$$

   con $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ para $i = 1, 2, 3$.