Examen Final
MATE 1107

1. (10*pts*) Sea f el operador de $\mathbb{Q}^3$ definido por

$$f(x,y,z) = (-6x + 11y + 16z, 6x - 7y - 12z, -7x + 10y + 16z)$$

   a) (5*pts*) Encuentre una base de Jordan relativa a f y su representación matricial respecto a esta base. Justifique su procedimiento con propiedades vistas en clase. (*Ayuda*: Verifique que $P_f(t) = t^3 - 3t^2 + 4$, y que -1 es valor propio.)

   b) (5*pts*) Describa en términos de la base canónica los operadores f_D y f_N de $\mathbb{Q}^3$, respectivamente diagonalizable y nilpotente, que conmutan tales que $f = f_D + f_N$. Justifique su procedimiento con propiedades vistas en clase.

2. (10*pts*) Considere $\mathbb{C}^3$ con el producto hermítico definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1\overline{x_2} + y_1\overline{y_2} + z_1\overline{z_2}.$$

Sea f el operador de $\mathbb{C}^3$ definido por

$$f(x,y,z) = \frac{1}{6}(13x + 10iy - 5iz, -10ix - 2y + 10z, 5ix + 10y + 13z).$$

   a) (7*pts*) Encuentre una base ortonormal formada por vectores propios de f y la representación matricial de f respecto a esta base. Justifique su procedimiento con propiedades vistas en clase. (*Ayuda*: Verifique que $P_f(t) = t^3 - 4t^2 - 3t + 18$, y que -2 es valor propio.)

   b) (3*pts*) Escriba f como combinación lineal de proyecciones ortogonales sobre subespacios dos a dos ortogonales.

3. (9*pts*) Considere $\mathbb{R}^4$ con el producto interno definido por

$$\langle (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + w_1w_2.$$

Sea f el operador de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$f(x,y,z,w) = (y - 3z, -x - w, 3x + 2w, y - 2z).$$

Verifique que

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v,w) & \longmapsto & \langle v, f(w) \rangle \end{array}$$

es un producto simpléctico y encuentre una base de Darboux de $\mathbb{R}^4$ para σ.

4. ($6pts$) Sea K un cuerpo y V un espacio vectorial sobre K de dimensión n. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\{\lambda^1, \ldots, \lambda^n\}$ la base dual.

   a) ($2pts$) Suponga que $n = 3$, describa una base de $T_2^0(V)$ y exprese

$$\begin{array}{rcl} T : V \times V & \longrightarrow & K \\ (a^i v_i, b^i v_i) & \longmapsto & a^1 b^3 + a^2 b^1 + a^3 b^2 \end{array}$$

   como combinación lineal de elementos de esa base.

   b) ($2pts$) Suponga que $n = 2$, sea $F \in T_1^1(V)$

$$F = (3\lambda^1 - 4\lambda^2) \otimes v_1 + (4\lambda^1 + 3\lambda^2) \otimes v_2$$

   Encuentre un operador f de V tal que para todo $v \in V$, $f(v) = F(v)$, donde $F(v)$ es la contracción de F por v, este visto como elemento en $T_0^1(V)$.

   c) ($2pts$) Suponga que $n = 2$, encuentre $F^* \in T_1^1(V)$ tal que para todo $\lambda \in V^*$, $f^*(\lambda) = F^*(\lambda)$, donde $F^*(\lambda)$ es la contracción de F^* por λ, este visto como elemento en $T_1^0(V)$ y f es el dual del operador del punto b) anterior.