Un curso de Álgebra Lineal II

Camilo Sanabria

Universidad de los Andes
Departamento de Matemáticas
Bogotá - Colombia.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Espacios vectoriales y transformaciones lineales

1.1. Espacios vectoriales

Sea K un cuerpo.

Definición 1.1. Un *espacio vectorial* es un conjunto V con dos operaciones

$$\begin{array}{rcl} + : V \times V & \longrightarrow & V \\ (v,w) & \longmapsto & v+w \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot : K \times V & \longrightarrow & V \\ (c,v) & \longmapsto & cv, \end{array}$$

que llamamos respectivamente *suma* y *multiplicación por escalar*, y un elemento $0 \in V$, que llamamos *el origen*, los cuales satisfacen las siguientes propiedades :

1. $(V, +, 0)$ *es un grupo abeliano*: para todo $u, v, w \in V$

$$v + w = w + v, \qquad u + (v + w) = (u + v) + w, \qquad v + 0 = 0,$$

   y existe $v' \in V$ tal que $v + v' = 0$;

2. *la multiplicación por escalar es unitaria y asociativa*: para todo $a, b \in K$ y $v \in V$

$$1v = v, \qquad a(bv) = (ab)v;$$

3. *la suma y la multiplicación por escalar son distributivas*: para todo $a, b \in K$ y $v, w \in V$

$$a(v + w) = av + aw, \qquad (a + b)v = av + bv$$

Ejemplo 1.2. Los espacios vectoriales V que presentamos en este ejemplo son imprescindibles.

1. *Espacio cero-dimensional*: $V = \{0\}$ es el espacio vectorial más pequeño que posible, consta únicamente del origen. Las operaciones corresponden a las únicas posibles.

2. *Espacio uni-dimensional*: $V = K$, junto con las operaciones mismas del cuerpo.

3. *Espacio n-dimensional de coordenadas*: $V = K^n$, el espacio formado por el producto cartesiano de $n \geq 1$ copias del cuerpo K, junto con las operaciones:

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) &= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n), \text{ y} \\ c(a_1, \dots, a_n) &= (ca_1, \dots, ca_n) \end{aligned}$$

4. *Espacio de funciones con valor en K*: Sea S un conjunto, $V = K^S$ el espacio de funciones $S \to K$, junto con las operaciones:

$$\begin{aligned} (f+g)(s) &= f(s) + g(s), \text{ y} \\ (cf)(s) &= c(f(s)), \text{ para todo } s \in S \end{aligned}$$

5. *Espacio de funciones con valor en K, con casi todos los valores iguales a cero*: Sea S un conjunto, $V = \left(K^S\right)_0$ el espacio de funciones $S \to K$ tales que todos los valores son cero salvo para un número finito de elementos de S, junto con las operaciones definidas como en K^S.

6. *Espacio de polinomios con coeficientes en K*: $V = K[t]$, el espacio compuesto por todos los polinomios en la variable t con coeficientes en K.

Proposición 1.3 (Ley de cancelación)**.** *Sean V un espacio vectorial sobre K y $u, v, w \in V$. Si $u + v = w + v$, entonces $u = w$.*

Dem. De hecho, si $v' \in V$ es tal que $v + v' = 0$, a partir de la igualdad $u + v = w + v$, sumando a v', obtenemos la igualdad buscada. □

Corolario 1.4 (Unicidad del neutro de la suma y del opuesto)**.** *Sean V un espacio vectorial sobre K y $v \in V$. Si $v', v'' \in V$ son tales que $v + v' = 0 = v + v''$ entonces $v' = v''$. También, si $0' \in V$ es tal que $w + 0' = w$ para todo $w \in V$, $0' = 0$.*

Notación 1.5. En vista de la unicidad del opuesto, al de $v \in V$ se le denota por $-v$.

Propiedad 1.6. *Sea V un campo vectorial sobre K. Entonces:*

1. $c0 = 0v = 0$ *para todo* $c \in K$ *y* $v \in V$;

2. $(-1)v = -v$ *para todo* $v \in V$; *y,*

3. *Si* $cv = 0$, *entonces* $c = 0$ *ó* $v = 0$.

Dem.

1. Tenemos $c0 + 0 = c0 = c(0+0) = c0 + c0$, luego, por Ley de cancelación, $c0 = 0$. Por otro lado, $0v + 0 = 0v = (0+0)v = 0v + 0v$, luego $0v = 0$.

2. Por unicidad del opuesto basta ver que $v + (-1)v = 0$, lo cual se sigue de las igualdades $v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))\, v = 0v$.

3. Suponga que $cv = 0$ y que $c \neq 0$, entonces $0 = c^{-1}0 = c^{-1}(cv) = (c^{-1}c)v = 1v = v$.

Definición 1.7. Sea V un espacio vectorial sobre K y $U \subseteq V$. Decimos que U es un *subespacio* de V, lo que denotamos por $U \leq V$, si U junto con las operaciones heredadas de V es un espacio vectorial.

Propiedad 1.8. *Sea V un espacio vectorial sobre K y $U \subseteq V$. Entonces $U \leq V$ si y solo si:*

1. $0 \in U$;

2. U es cerrado bajo suma*: si $v, w \in U$, entonces $v + w \in U$; y,*

3. U es cerrado bajo multiplicación por escalar*: si $c \in K$ y $v \in U$, entonces $cv \in U$.*

Dem. Suponga primero que $U \leq V$. Luego U contiene un neutro respecto a la suma, y, como la operación de suma es la de V este es 0, así $0 \in U$. Por otro lado, como U es un espacio vectorial con las operaciones de V, la suma de dos elementos en U está en U y la multiplicación por escalar de un elemento en U también está en U.
Recíprocamente, si U contiene al origen y es cerrado bajo suma, la restricción de la suma a $U \times U$ da una operación $+ : U \times U \to U$ que cumple con las condiciones en Definición 1.1.1. Similarmente con la restricción de la multiplicación por escalar a $K \times U$ y las condiciones en Definición 1.1.2. Finalmente, la distributividad, condiciones en Definición 1.1.3, se hereda de V. $\square$

Observación 1.9. Note que en la práctica, basta con verificar las últimas dos condiciones para establecer que U es un subespacio, pues la condición 3. garantiza que U contiene al origen: tome $c = 0$, siempre que $U \neq \emptyset$.

Definición 1.10. Sean V un espacio vectorial sobre K y $v_1, \ldots, v_n \in V$. Una *combinación lineal* de $v_1, \ldots, v_n$ es un elemento de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n, \qquad c_1, \ldots, c_n \in K.$$

A los valores $c_1, \ldots, c_n$ los llamamos los *coeficientes* de la combinación lineal.

Proposición 1.11. *Sea V un espacio vectorial sobre K y $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$, el conjunto formado por todas las combinaciones lineales de elementos $v_1, \ldots, v_n \in S$ es un subespacio de V.*

Dem. Defina

$$U = \{\sum_{i=1}^{n} c_i v_i |\ c_1, \ldots, c_n \in K,\ v_1, \ldots, v_n \in S, n \geq 1\}.$$

Tome $v, w \in U$, es decir $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ y $w = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$ para algunos $\{a_i\}_{i=1}^{n}, \{b_i\}_{i=1}^{m} \in K$ y $\{v_i\}_{i=1}^{n}, \{w_i\}_{i=1}^{m} \in S$. Luego

$$v + w = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n + b_1 w_1 + \ldots + b_n w_n$$

es una combinación lineal de elementos de S y así $v + w \in U$. Además, si $c \in K$, entonces

$$cv = ca_1 v_1 1 + \ldots + ca_n v_n,$$

de donde $cv \in U$. Así U es cerrado bajo suma y multiplicación por escalar, luego es subespacio de V. □

Definición 1.12. Sean V un espacio vectorial sobre K y $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$, al subespacio formado por todas las combinaciones lineales de elementos de S lo llamamos el *espacio generado por* S y lo denotamos por $\langle S \rangle$.

Observación 1.13. Por convención, definimos $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$, de forma que aún cuando $S = \emptyset$, $\langle S \rangle$ es un espacio vectorial.

Notación 1.14. Las combinaciones lineales de elementos en $S = \{v_i\}_{i \in I}$ las denotaremos por

$$\sum_{i \in I} c_i v_i$$

con $c_i \in K$ donde $c_i = 0$ para todo indice $i \in I$ salvo para una colección finita. Note que estas sumas son finitas pues los coeficientes que no son 0 son finitos.

Proposición 1.15. *Sean V un espacio vectorial sobre K, $S \subseteq V$ y $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de subespacios de V. Entonces:*

1. *la intersección $U = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ es un subespacio de V; y,*

2. *$\langle S \rangle$ es el mínimo subespacio vectorial en V que contiene a S. Es decir, si $W \leq V$ es tal que $S \subseteq W$, tenemos que $\langle S \rangle \leq W$.*

Dem.

1. Sean $v, w \in U$ y $a \in K$, luego, para todo $\lambda \in \Lambda$, $v, w \in U_\lambda$, y así $v + w, cv \in U_\lambda$. De donde $v + w, cv \in U$.

2. Sea $W \leq V$ tal que $S \subseteq W$, como W es cerrado bajo suma y bajo multiplicación por escalar, si $v_1, \ldots, v_n \in S \subseteq W$ y $c_1, \ldots, c_n \in K$, la combinación lineal $\sum_{i}^{n} c_i v_i$ está en W, es decir que toda combinación lineal de elementos de S está en W, así $\langle S \rangle \subseteq W$. Pero como $\langle S \rangle$ es un espacio vectorial, $\langle S \rangle \leq W$. □

1.2. Base y dimensión

Sea K un cuerpo y V un espacio vectorial sobre K.

Definición 1.16. Un subconjunto $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in I} \subseteq V$ es una *base* de V si para todo $v \in V$ existe una única combinación lineal de elementos en $\mathcal{B}$

$$\sum_{i\in I} c_i v_i = v, \qquad c_i \in K$$

($c_i = 0$ para todo $i \in I$ salvo para una colección finita de indices $i \in I$). Es decir, para toda combinación lineal $\sum_{i\in I} a_i v_i = v$ tenemos $a_i = c_i$ para todo $i \in I$.

Observación 1.17. Por convención la base de un espacio cero-dimensional es $\emptyset$. Note que una condición necesaria para que $\mathcal{B}$ sea una base es que $\langle \mathcal{B} \rangle = V$. La otra condición necesaria la explica el siguiente lema.

Lema 1.18. *Sea $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in I}$ una base de V, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Si $c_i \in K$, $i \in I$ son tales que*

$$0 = \sum_{i\in I} c_i v_i,$$

entonces $c_i = 0$ para todo $i \in I$.

Dem. Como $\mathcal{B} \neq \emptyset$, entonces $V \neq \{0\}$. Sean $v \in V$, $v \neq 0$ y $a_i \in K$, $i \in I$, tales que

$$v = \sum_{i\in I} a_i v_i.$$

Suponga por contradicción que $0 = \sum_{i\in I} c_i v_i$, con $c_i \neq 0$ para algún $i \in I$. Sea $j \in I$ tal que $c_j \neq 0$. Entonces

$$v = v + 0 = \sum_{i\in I} (a_i + c_i) v_i,$$

y, como $a_j \neq a_j + c_j$, tenemos dos combinaciones lineales distintas iguales a v, lo cual contradice la definición de base. Así $c_i = 0$ para todo $i \in I$. $\square$

Definición 1.19. Decimos que V tiene dimensión finita si tiene una base finita. De lo contrario decimos que V tiene dimensión infinita.

Teorema 1.20. *Si V tiene dimensión finita, el número de elementos de la base es independiente de la base escogida.*

Dem. La afirmación para el caso cero-dimensional sigue del hecho que la única base es de cero elementos. Ahora suponga por contradicción que V tiene dos bases $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\{w_1, \ldots, w_m\}$ con $n \neq m$. Sin perdida de generalidad, podemos asumir que $m > n$.
Sean $a_{ij} \in K$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, tales que

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Así, si $v \in V$ es tal que

$$v = \sum_{j=1}^{m} x_j w_j, \quad x_1, \ldots, x_m \in K,$$

tendíamos

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j=1}^{m} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right) v_i. \end{aligned}$$

En particular si $v = 0$, por el lema anterior

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

el cual es un sistema homogeneo subdeterminado, e.d. con más variables que ecuaciones, luego tiene soluciones no triviales. Si $x_1, \ldots, x_m$ es una de estas, obtenemos al origen como combinación lineal de los elementos de la base $\{w_1, \ldots, w_m\}$ con coeficientes no todos iguales a cero, lo cual contradice el lema ya mencionado. De donde $m = n$. $\square$

Definición 1.21. Suponga que V tiene dimensión finita. Al número de elementos en las bases de V lo llamamos dimensión de V y lo denotamos por $\dim(V)$. Si V tiene dimensión infinita, escribimos $\dim(V) = \infty$, con $n \leq \infty$ para todo entero n.

Definición 1.22. Sea $S \subseteq V$, decimos que S es *linealmente dependiente* si algún elemento de S es combinación lineal de los otros. Es decir, si existe $v \in S$ y $v_1, \ldots, v_n \in S \setminus \{v\}$ tales que

$$v = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$$

para algunos coeficientes $c_1, \ldots, c_n \in K$. Si S no es linealmente dependiente, decimos que S es *linealmente independiente.*

Observación 1.23. El lema que se usó en la demostración del teorema refiere a una condición necesaria para que un conjunto sea base: que toda combinación lineal de sus elementos igual a cero tiene todos sus coeficientes triviales. Esto es de hecho equivalente a ser linealmente independiente.

Proposición 1.24. *Sea $S \subseteq V$. Entonces S es linealmente independiente si, y solo si,*

$$0 = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n, \quad c_1, \ldots, c_n \in K,$$

con $v_1, \ldots, v_n \in S$, implica que $c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Dem. Establezcamos la contrapositiva: S es linealmente dependiente si y solo si existen $v_1, \ldots, v_n \in S$ tales que

$$0 = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n, \quad c_1, \ldots, c_n \in K$$

con algún $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $c_i \neq 0$. Lo cual es inmediato del hecho que esta última igualdad es equivalente a

$$v_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} (-c_j/c_i) v_j,$$

siempre que c_i sea invertible en K, es decir siempre que $c_i \neq 0$. □

Proposición 1.25. *Sea $\mathcal{B} \subseteq V$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de V si y solo si*

1. *$\mathcal{B}$ es linealmente independiente, y,*
2. *V es generado por $\mathcal{B}$ (e.d. $\langle \mathcal{B} \rangle = V$).*

Dem. Note que es suficiente demostrar que si $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ entonces $\mathcal{B}$ es una base si y solo si $\mathcal{B}$ es linealmente independiente (ver Observación 1.17). Con esto en mente, suponga primero que $\mathcal{B}$ es base, luego por el Lema 1.18, $\mathcal{B}$ es linealmente independiente. Reciprocamente, suponga que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente. Asuma por contradicción que $\mathcal{B}$ no es base, luego existen $v \in V$, $v \neq 0$, y dos combinaciones lineales distintas ambas iguales a v. La diferencia de estas dos daría una combinación lineal igual a 0 con coeficientes no todos nulos. Lo cual contradice Propiedad 1.24.

Ejemplo 1.26. Por la propiedad anterior, no es difícil verificar que para cada uno de los siguientes espacios V, el respectivo conjunto $\mathcal{B}$ es una base.

1. Si $V = K^n$, y, para $i = 1, \ldots, n$, $e_i \in V$ es el elemento con ceros en todas las entradas salvo 1 en la i-ésima, entonces $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es base.
2. Sean I un conjunto finito, $V = K^I$ y, para $i \in I$, defina $\delta_i : I \to K$ tal que $\delta_i(i) = 1$ y, si $j \neq i$, $\delta_i(j) = 0$. Entonces $\mathcal{B} = \{\delta_i\}_{i \in I}$ es base.
3. Sean I un conjunto y $V = \left(K^I\right)_0$ (ver Ejemplo 1.2.5). Entonces $\mathcal{B} = \{\delta_i\}_{i \in I}$ es base donde $\delta_i : I \to K$ es tal que $\delta_i(i) = 1$ y, si $j \neq i$, $\delta_i(j) = 0$.
4. Si $V = K[t]$, $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \ldots\} = \{t^n\}_{n \geq 0}$ es base.

Definición 1.27. En K^n, a la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, donde, para $i = 1, \ldots, n$, e_i es el elemento con ceros en todas las entradas salvo 1 en la i-ésima, se le llama *base canónica*.

Lema 1.28. *Si $S \subseteq V$ es linealmente independiente pero $v \in V$ es tal que $S \cup \{v\}$ es linealmente dependiente, entonces $v \in \langle S \rangle$.*

Dem. Como $S \cup \{v\}$ es linealmente dependiente, por Proposición 1.24 existen $v_1, \ldots, v_n \in S$ y $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in K$, no todos iguales a cero, tales que

$$0 = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n + a_{n+1} v.$$

Note que $a_{n+1} \neq 0$, o de lo contrario tendríamos una combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n \in S$ con no todos los coeficientes iguales a cero, contradiciendo la independiencia lineal de S. Así

$$v = \sum_{i=1}^{n} (-a_i/a_{n+1}) v_i \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle.$$

De donde, $v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq \langle S \rangle$. □

Proposición 1.29. *Suponga que V tiene dimensión finita no-nula y $S \subseteq V$ es un subconjunto finito. Suponga que $S_0 \subseteq S$ es un conjunto linealmente independiente. Entonces existe un conjunto linealmente independiente maximal $S' \subseteq S$ tal que $S_0 \subseteq S'$ (es decir, si $S'' \subseteq S$ es linealmente independiente tal que $S' \subseteq S''$, entonces $S' = S''$). Más aún $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.*

Dem. Enumere S de tal forma que $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $S_0 = \{v_1, \ldots, v_m\}$, $m \leq n$. Si $S_0 = \emptyset$, definimos $m = 0$. Iterativamente, para $i = 1, \ldots, n - m$, definimos

$$S_i = \begin{cases} S_{i-1} & \text{si } v_{m+i} \in \langle S_{i-1} \rangle \\ S_{i-1} \cup \{v_{m+i}\} & \text{si } v_{m+i} \notin \langle S_{i-1} \rangle \end{cases}.$$

De forma que, por el lema anterior, la independencia lineal de S_{i-1} implica la de S_i. Tome $S' = S_{n-m}$.
Por construcción, $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots \subseteq S_{n-m} = S'$ y S' es linealmente independiente. Ahora, si $v_j \in S \setminus S'$ entonces $v_j \in \langle S_{j-1} \rangle$, en particular $v_j \in \langle S' \rangle$ y así $S' \cup \{v_j\}$ es linealmente dependiente. Luego $S' \subset S$ es máximal respecto a la propiedad de contener a S_0 y ser linealmente independiente. El mismo argumento demuestra que $S \subseteq \langle S' \rangle$, y, Propiedad 1.15.2. implica que $\langle S \rangle \leq \langle S' \rangle$. La contenencia opuesta se sigue de $S' \subseteq S$, y de la doble contenencia, $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$. □

Teorema 1.30 (Extensión de conjuntos linealmente independientes a base)**.** *Suponga que V tiene dimensión finita y que $\mathcal{B}_0 \subseteq V$ es finito y linealmente independiente. Entonces existe una base $\mathcal{B}_1 \subseteq V$, tal que $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_1$.*

Dem. Como V tiene dimensión finita, existe una base finita $\mathcal{B} \subseteq V$. Sea $S = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}$, y $\mathcal{B}_1$ un conjunto linealmente independiente máximal como en la propiedad anterior. Tenemos así $\langle \mathcal{B}_1 \rangle = \langle S \rangle \geq \langle \mathcal{B} \rangle = V$. Luego $\mathcal{B}_1$ es linealmente independiente y genera V, es decir, por Propiedad 1.25, $\mathcal{B}_1$ es una base y contiene a $\mathcal{B}_0$. □

Lema 1.31. *Suponga que V tiene dimensión infinita, entonces para todo entero $n \geq 1$, existe un conjunto $S \subseteq V$ linealmente independiente con $|S| = n$.*

Dem. Hacemos inducción en n. Como V tiene dimensión infinita $V \neq \{0\}$, y así, para cualquier $v \in V$, $v \neq 0$, $S = \{v\}$ es linealmente independiente y $|S| = 1$. Esto completa el caso base. Para el paso inductivo, suponga que tenemos un conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ linealmente independiente. Como V tiene dimensión infinita, existe $v_{n+1} \in V \setminus \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. De hecho en caso contrario, por Propiedad 1.25, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sería una base finita de V, contradiciendo la hipótesis según la cual V tiene dimensión infinita. Finalmente, Lema 1.28 implica que $S = \{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ es linealmente independiente. □

Teorema 1.32 (Monotonía de la dimensión)**.** *Si $U \leq V$, entonces $\dim U \leq \dim V$. Más aún, si V tiene dimensión finita y $\dim U = \dim V$, entonces $U = V$.*

Dem. Suponga primero que $\dim(U) = \infty$. Asuma por contradiccón que V tiene dimensión finita. Por el lema anterior existe $\mathcal{B}_0 \subseteq U$ linealmente independiente, con $|\mathcal{B}_0| = \dim(V) + 1$. Por Teorema 1.30, existe una base $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_0$ de V, luego V tiene una base con más elementos que su dimensión, contradiciendo Teorema 1.20. Luego $\dim(V) = \infty$, y así $\dim(U) \leq \dim(V)$.
Suponga ahora que U tiene dimensión finita. Si $\dim(V) = \infty$, entonces $\dim(U) \leq \dim(V)$. Asumamos entonces que V tiene dimensión finita. Tome una base $\mathcal{B}_0$ de U, la cual por Teorema 1.30 extendemos a una base $\mathcal{B}_1$ de V. La inclusión $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_1$ implica que $|\mathcal{B}_0| \leq |\mathcal{B}_1|$, es decir $\dim(U) \leq \dim(V)$.
Cuando $\dim(U) = \dim(V)$ y V tiene dimensión finita, toda base S_0 de U es también una base de V. De hecho, ya vimos que una base de U se puede extender a una base de V, pero si esta extensión contiene más elementos, la dimensión de V sería mayor a la de U, contradiciendo la hipótesis $\dim(U) = \dim(V)$. Luego $U = \langle \mathcal{B}_0 \rangle = V$. □

Observación 1.33 (Existencias de bases y dimensión infinita)**.** Teorema 1.30 se puede usar para demostrar que todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base, partiendo de $\mathcal{B}_0 = \emptyset$. La cuestión para dimensión infinita toca la fibra de los fundamentos de la matemática moderna y requiere admitir el axioma de elección. Siendo más precisos, usamos una versión equivalente a este:

> Lema de Zorn. Sea $(P, \preccurlyeq)$ un conjunto parcialmente ordenado en el que toda cadena admite una cota superior, entonces P contiene un elemento maximal.

A partir de este axioma, suponga que V tiene dimensión infinita y tome $\mathcal{B}_0 \subseteq V$ un conjunto linealmente independiente, ó $\mathcal{B}_0 = \emptyset$. Sea P la colección de conjuntos linealmente independientes que contienen a S_0, el cual ordenamos por contenencia. Dada una cadena en P, la unión de todos sus elementos también está en P y es una cota superior de ella. Por Lema de Zorn, P contiene un máximal $\mathcal{B}_1$. Usando un argumento similar al de Lema1.28, se demuestra que $\mathcal{B}_1$ es una base de V. De hecho, si existe $v \in V \setminus \langle \mathcal{B}_1 \rangle$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \{v\}$ sería un conjunto linealmente independiente que contiene estrictamente a $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_0$, contradiciendo la maximalidad de $\mathcal{B}_1$ en P.
De esta forma todo espacio vectorial tiene una base. Más aún, en cualquier espacio vectorial, todo conjunto linealmente independiente se puede extender a

una base.
Similarmente podemos extender Proposición 1.29 para concluir que si dentro de $S \subseteq V$ tomamos un subconjunto $S_0 \subseteq S$ linealmente independiente, entonces existe un subconjunto máximal linealmente independiente $S' \subseteq S$ que contiene a S_0 y tal que $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$. De hecho, tomamos, usando Lema de Zorn, un máximal S' en la colección, ordenada por inclusión, de subconjunto linealmente indpendientes de S que contienen a S_0. El Lema 1.28 implica la igualdad $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Observación 1.34 (Vector de coordenadas)**.** Dada una base $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in I}$ de V, para cada $v \in V$ existe una única combinación lineal

$$v = \sum_{i \in I} c_i v_i.$$

Esta unicidad nos permite identificar cada elemento en v con un único elemento en $\left(K^I\right)_0$, explícitamente con

$$\begin{array}{rcl} \left[v\right]^{\mathcal{B}} : I & \longrightarrow & K \\ i & \longrightarrow & c_i \end{array}$$

el cual llamamos *vector de coordenadas de v en la base $\mathcal{B}$*. Para cada $i \in I$, denotamos

$$\left[v\right]_i^{\mathcal{B}} = \left[v\right]^{\mathcal{B}}(i).$$

Esta identificación entre elementos y vector de coordenadas va mas allá de una mera biyección, también respeta la estructura de ambos espacios, lo cual permite equiparar a V con $\left(K^I\right)_0$ como espacios vectoriales. Este concepto de equiparar es parte del tema de la siguiente sección.

1.3. Transformaciones lineales

Sea K un cuerpo y U, V, W espacios vectoriales sobre K.

Definición 1.35. Sea $f : V \to W$, decimos que f es una *transformación lineal* si

1. *preserva sumas*: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ para todo $v_1, v_2 \in V$; y,
2. *preserva productos por escalar*: $f(cv) = cf(v)$ para todo $c \in K$, $v \in V$.

Cuando $W = V$, es usual llamar a estas transformaciones *operadores*. Al conjunto de transformaciones lineales de V en W lo denotamos por $\mathrm{Hom}_K(V, W)$.

Ejemplo 1.36. 1. La función $\underline{0} : V \to W$ definida por $\underline{0}(v) = 0$ para todo v es una transformación lineal.

2. Suponga que V es unidimensional. Dado $\lambda \in K$, la función $f : V \to V$ definida por $f(v) = \lambda v$ para todo v es una transformación lineal. Recíprocamente, si $f : V \to V$ es un transformación lineal existe $\lambda \in K$ tal que $f(v) = \lambda v$ para todo v. De hecho, si $v_0 \neq 0$ entonces $V = \langle v_0 \rangle$, luego $f(v_0) = \lambda v_0$ para algún $\lambda \in K$, ahora si $v \in V$, existe $c \in K$ tal que $cv_0 = v$, entonces

$$f(v) = cf(v_0) = c\lambda v_0 = \lambda c v_0 = \lambda v.$$

Propiedad 1.37. *Si $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, entonces:*

1. $f(0) = 0$.

2. $f(-v) = -f(v)$ *para todo* $v \in V$.

3. $f(c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n) = c_1 f(v_1) + \ldots + c_n f(v_n)$ *para todo* $c_i \in K$, $v_i \in V$, $i = 1, \ldots, n$.

Dem.

1. Sea $v \in V$, entonces $f(0) = f(0v) = 0f(v) = 0$.

2. Sea $v \in V$, entonces $f(v) + f(-v) = f(v + (-v)) = f(0) = 0$, luego por Unicidad del opuesto, $f(-v) = -f(v)$.

3. Usaremos inducción en n, siendo el caso base, $n = 2$, cierto por definición de transformación lineal. Ahora, si asumimos que es cierto para n,

$$\begin{aligned} f(c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n + c_{n+1} v_{n+1}) &= f(c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n) + f(c_{n+1} v_{n+1}) \\ &= c_1 f(v_1) + \ldots + c_n f(v_n) + c_{n+1} f(v_{n+1}). \end{aligned}$$

   Luego es cierto para todo n.

□

Proposición 1.38. *El conjunto* $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ *junto con el origen definido por* $\underline{0}$, *y las operaciones dadas, para* $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ *y* $c \in K$, *por*

$$\begin{aligned} (f + g)(v) &= f(v) + g(v), \\ (cg)(v) &= cg(v), \end{aligned}$$

para todo $v \in V$, *es un espacio vectorial sobre* K.

Dem. Basta notar que la suma de dos funciones lineales es lineal, y que el producto por escalar de una función lineal es también lineal, pues todas la propiedades necesarias sobre las operaciones se heredan de las de W. □

Proposición 1.39. *Sean* $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ *y* $g \in \mathrm{Hom}_K(W, U)$, *entonces* $(g \circ f) \in \mathrm{Hom}_K(V, U)$.

Dem. Sean $v, v_1, v_2 \in V$ y $c \in K$, entonces, por un lado

$$g \circ f(v_1 + v_2) = g\left(f(v_1) + f(v_2)\right) = g \circ f(v_1) + g \circ f(v_2),$$

y por el otro,

$$g \circ f(cv) = g\left(cf(v)\right) = cg \circ f(v).$$

$\square$

Proposición 1.40. *Sean $\{v_1, \ldots, v_n\} \in V$ y $\{w_1, \ldots, w_n\} \in W$ tales que $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = V$, entonces:*

1. *existe a lo sumo un único $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ tal que $f(v_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$; y,*
2. *si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es además linealmente independiente, existe, y esúnica, $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ tal que $f(v_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Dem.

1. Sean $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ tales que $f(v_i) = w_i = g(v_i)$, para $i = 1, \ldots, n$. Tome $v \in V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ y $c_1, \ldots, c_n \in K$ tales que $v = c_1v_1 + \ldots + c_nv_n$, entonces

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i = \sum_{i=1}^{n} c_i g(v_i) = g(v).$$

   Así $f = g$.

2. Las hipótesis implican que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V, luego dado $v \in V$, existe un único $(c_1, \ldots, c_n) \in K^n$ tal que $v = c_1v_1 + \ldots + c_nv_n$. Defina $f : V \to W$ por

$$f(v) = c_1w_1 + \ldots + c_nw_n.$$

   Veamos ahora que f es una transformación lineal. Sean $v_1, v_2 \in V$ y $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in K^n$ tales que $v_1 = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$ y $v_2 = b_1v_1 + \ldots + b_nv_n$. Entonces

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= (a_1 + b_1)v_1 + \ldots + (a_n + b_n)v_n \\ cv_1 &= (ca_1)v_1 + \ldots + (ca_n)v_n, \end{aligned}$$

   luego

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= (a_1 + b_1)w_1 + \ldots + (a_n + b_n)w_n \\ &= a_1w_1 + \ldots + a_nw_n + b_1w_1 + \ldots + b_nw_n \\ &= f(v_1) + f(v_2); \text{ y,} \\ f(cv_1) &= (ca_1)w_1 + \ldots + (ca_n)w_n \\ &= c(a_1w_1 + \ldots + a_nw_n) \\ &= cf(v_1) \end{aligned}$$

□

Proposición 1.41. *Sea $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Si f es biyectiva, f^{-1} es una transformación lineal.*

Dem. Sean $w, w_1, w_2 \in W$ y $c \in K$. Como f es biyectiva, existen $v, v_1, v_2 \in V$ únicos tales que $f(v) = w$, $f(v_1) = w_1$ y $f(v_2) = w_2$. En particular $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = w_1 + w_2$. Así, por un lado

$$f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}\left(f(v_1 + v_2)\right) = v_1 + v_2,$$

y por el otro

$$f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2) = f^{-1}\left(f(v_1)\right) + f^{-1}\left(f(v_2)\right) = v_1 + v_2,$$

luego $f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$.
Igualmente, como $f(cv) = cf(v) = cw$, por un lado

$$f^{-1}(cw) = f^{-1}\left(f(cv)\right) = cv,$$

y por el otro

$$cf^{-1}(w) = cf^{-1}\left(f(v)\right) = cv,$$

luego $f^{-1}(cw) = cf^{-1}(w)$. Entonces, como f^{-1} respeta sumas y productos por escalar, es una transformación lineal.

Definición 1.42. Si $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ es una biyección, decimos que f es un *isomorfismo*, y si $W = V$ lo llamamos *automorfismo*. Si existe un isomorfismo $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ decimos que V y W son isomorfos y lo denotamos por $V \simeq_K W$.

Teorema 1.43. *Suponga que V y W tienen dimensión finita. Entonces $V \simeq_K W$ si y solo si $\dim(V) = \dim(W)$.*

Dem. Asuma primero que $V \simeq_K W$ y tome un isomorfismo $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V, donde $n = \dim(V)$. Denote $w_i = f(v_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Veamos que $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es base de W y así $\dim(V) = n = \dim(W)$. Sean $c_1, \ldots, c_n \in K$ tales que $0 = c_1w_1 + \ldots + c_nw_n$. Luego

$$f(c_1v_1 + \ldots + c_nv_n) = c_1f(v_1) + \ldots + c_nf(v_n) = c_1w_1 + \ldots + c_nw_n = 0$$

como f es inyectiva y $f(0) = 0$, $c_1v_1 + \ldots + c_nv_n = 0$; y, como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente, $c_1 = \ldots = c_n = 0$. De donde $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es linealmente independiente. También para $w \in W$, como f es sobreyectiva, tome $v \in V$ tal que $f(v) = w$. Ahora, como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera V, existen $c_1, \ldots, c_n \in K$ tales que $v = c_1v_1 + \ldots + c_nv_n$. Luego

$$w = f(v) = f(c_1v_1 + \ldots + c_nv_n) = c_1f(v_1) + \ldots + c_nf(v_n) = c_1w_1 + \ldots + c_nw_n.$$

De donde $W = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$. Esto completa la prueba de la necesidad.
Para establecer la suficiencia, asuma ahora que $\dim(V) = \dim(W) = n$ y sean

$\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ respectivamente bases de V y W. Por Propiedad 1.40.2, existe $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ tal que $w_i = f(v_i)$, $i = 1, \ldots, n$. La prueba estará completa cuando establezcamos que f es biyectiva. Tome $v_1', v_2' \in V$ y $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in K$ tales que $v_1' = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$ y $v_2' = b_1v_1 + \ldots + b_nv_n$ y suponga que $f(v_1') = f(v_2')$. Es decir, $f(v_1' - v_2') = f(v_1') - f(v_2') = 0$. Como

$$v_1' - v_2' = (a_1 - b_1)v_1 + \ldots + (a_n - b_n)v_n,$$

entonces

$$0 = f(v_1 - v_2) = (a_1 - b_1)w_1 + \ldots + (a_n - b_n)w_n.$$

La independencia lineal de $\{w_1, \ldots, w_n\}$ implica que $a_i - b_i = 0$, o equivalentemente, $a_i = b_i$ para $i = 1, \ldots, n$. En particular $v_1' = v_2'$, y f es entonces inyectiva. Para establecer la sobreyectividad de f, tome $w \in W$ y $c_1, \ldots, c_n \in K$ tales que $w = c_1w_1 + \ldots + c_nw_n$. Entonces, si $v = c_1v_1 + \ldots + c_nv_n$

$$f(v) = f(c_1v_1 + \ldots + c_nv_n) = c_1f(v_1) + \ldots + c_nf(v_n) = c_1w_1 + \ldots + c_nw_n = w.$$

Por lo cual, f es sobreyectiva. Al ser inyectiva y sobreyectiva, f es un isomorfismo. □

Definición 1.44. Sea $f \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$. Definimos:

1. el *núcleo* (o el *kernel*) de f por

   $$\ker(f) = \{v \in V |\ f(v) = 0\};$$

   y,

2. la *imagen* de f por

   $$\operatorname{im}(f) = \{w \in W |\ \exists v \in V : f(v) = w\}.$$

Propiedad 1.45. *Sea $f \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$, entonces $\ker(f) \leq V$ y $\operatorname{im}(f) \leq W$.*

Dem. Note que como $f(0) = 0$, $0 \in \ker(f)$ y $0 \in \operatorname{im}(f)$. Ahora si $v_1, v_2 \in \ker(f)$ y $a \in K$, entonces

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0, \text{ y } f(av_1) = af(v_1) = a0 = 0$$

es decir $v_1 + v_2 \in \ker(f)$ y $av_1 \in \ker(f)$. De donde, por Propiedad 1.8, $\ker(f) \leq V$. Por otro lado, si $w_1, w_2 \in \operatorname{im}(f)$ y $a \in K$, existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ y así

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = w_1 + w_2, \text{ y } f(av_1) = af(v_1) = aw_1$$

es decir $w_1 + w_2 \in \operatorname{im}(f)$ y $av_1 \in \operatorname{im}(f)$. De donde, por Propiedad 1.8, $\operatorname{im}(f) \leq V$.

Proposición 1.46. *Sea $f \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$, entonces f es inyectiva si y solo si* $\ker(f) = \{0\}$.

Dem. Suponga primero que f es inyectiva, entonces por Propiedad 1.37.1 $\ker(f) = \{0\}$. Suponga ahora que $\ker(f) = \{0\}$ y sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = f(v_2)$, luego

$$f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = 0,$$

es decir $v_1 - v_2 \in \ker(f)$, de donde $v_1 - v_2 = 0$ y así $v_1 = v_2$. $\square$

Teorema 1.47. *Suponga que V tiene dimensión finita y sea $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Entonces*

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(V)$$

Dem. Tenemos $\ker(f) \leq V$, luego $\dim(\ker(f)) \leq \dim(V)$. Denote $n = \dim(\ker(f))$ y $n + m = \dim(V)$. Tome $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ base de $\ker(f)$, la cual extendemos a una base $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+m}\}$ de V.
En caso de que $n = \dim(\ker(f)) = 0$, tomamos como base de $\ker(f) = \emptyset$ y de V cualquier base (si también $n + m = 0$, no hay nada que demostrar, pues bajo tales hipótesis $\mathrm{im}(f) = \{0\}$ y se sigue el teorema). Denote $w_i = f(v_{n+i})$, $i = 1, \ldots, m$. Basta demostrar que $\{w_1, \ldots, w_m\}$ es base de $\mathrm{im}(f)$, pues en tal caso $m = \dim(im(f))$, y para esto usamos Proposición 1.25.
Veamos primero que $\{w_1, \ldots, w_m\}$ es linealmente independiente. Suponga que $a_1, \ldots, a_m \in K$ son tales que

$$a_1 w_1 + \ldots + a_m w_m = 0$$

luego si $v = a_1 v_{n+1} + \ldots + a_m v_{n+m}$, entonces

$$f(v) = a_1 f(v_{n+1}) + \ldots + a_m f(v_{n+m}) = a_1 w_1 + \ldots + a_m w_m = 0,$$

y $v \in \ker(f)$. Pero como $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \ker(f)$, existen $b_1, \ldots, b_n \in K$ tales que

$$v = b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n$$

es decir $b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n = v = a_1 v_{n+1} + \ldots + a_m v_{n+m}$ y

$$0 = (-b_1)v_1 + \ldots + (-b_n)v_n + a_1 v_{n+1} + \ldots + a_m v_{n+m}.$$

Finalmente, siendo $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+m}\}$ linealmente independiente, esta última igualdad implica que $a_1 = \ldots = a_m = 0$. La independencia lineal de $\{w_1, \ldots, w_m\}$ se sigue de Proposición 1.24.
Establezcamos ahora que $\langle w_1, \ldots, w_m \rangle = im(f)$. Si $w \in \mathrm{im}(f)$, existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$. Tome entonces $c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots, c_{n+m} \in K$ tales que

$$v = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n + c_{n+1} v_{n+1} + \ldots + c_{n+m} v_{n+m},$$

de forma que

$$\begin{aligned} w = f(v) &= f(\underbrace{c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n}_{\in\ \ker(f)}) + c_{n+1} f(v_{n+1}) + \ldots + c_{n+m} f(v_{n+m}) \\ &= c_{n+1} w_1 + \ldots + c_{n+m} w_m, \end{aligned}$$

luego $w \in \langle w_1, \ldots, w_m \rangle$. De donde $\mathrm{im}(f) \leq \langle w_1, \ldots, w_m \rangle$. La otra inclusión es inmediata pues $w_i = f(v_{n+1}) \in \mathrm{im}(f)$, $i = 1, \ldots, m$. $\square$

Corolario 1.48. *Suponga que V tiene dimensión finita y sea $f \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. $\dim(\ker(f)) = \{0\}$*; y,*
2. $\dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(V)$.

Dem. Es inmediata de la igualdad $\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(V)$.

Observación 1.49 (Dimensión arbitraria e isomorfismo)**.** Los dos últimos teoremas tienen su generalización a dimensión arbitraria. La caracterización de un espacio lineal, salvo isomorfismo, por su dimensión, se puede reescribir como: si $\mathcal{B}_V = \{v_j\}_{j\in J}$ y $\mathcal{B}_W = \{w_i\}_{i\in I}$ son respectivamente bases V y W, entonces $V \simeq_K W$ si y solo si existe una biyección $\phi : J \to I$. De hecho, se puede demostrar que los mapas (ver notación en Observación 1.33)

$$\begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & \left(K^J\right)_0 \\ v & \longmapsto & \left[v\right]^{\mathcal{B}_V} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} W & \longrightarrow & \left(K^I\right)_0 \\ w & \longmapsto & \left[w\right]^{\mathcal{B}_W} \end{array},$$

son isomorfismos. Ahora, dada la biyección $\phi : J \to I$ entre los indices de las bases, también es isomorfismo la transformación lineal definida por las imágenes de la base $\{\delta_j\}_{j\in J}$ de $\left(K^J\right)_0$

$$\begin{array}{rcl} \left(K^J\right)_0 & \longrightarrow & \left(K^I\right)_0 \\ \delta_j & \longmapsto & \delta_{\phi(j)}. \end{array}$$

Tenemos así $V \simeq_K \left(K^J\right)_0 \simeq_K \left(K^I\right)_0 \simeq_K W$.
Recíprocamente, veamos que si $V \simeq W$ son isomorfos, existe una biyección entre J e I. Para esto basta demostrar que dos bases de V están en correspondencia biyectiva, de hecho si $f \in \operatorname{Hom}_K(W, V)$ es un isomorfismo entonces la imagen $f(\mathcal{B}_W)$ es una base de V, y está en biyección con S; luego si existe una biyección entre $\mathcal{B}_V$ y $f(\mathcal{B}_W)$, hay una biyección entre J e I.
Ya establecimos el resultado para el caso en dimensión finita. Supongamos entonces que V tiene dimensión infinita y sean $\mathcal{B}_V = \{v_j\}_{j\in J}$ y $\mathcal{B}'_V = \{v_{j'}\}_{j'\in J'}$ bases de V, y para cada $j \in J$ denote

$$J'_j = \left\{ j' \in J' \mid \left[v_j\right]^{\mathcal{B}'_V}_{j'} \neq 0 \right\}.$$

Es decir J'_j es la mínima colección de indices en J' con la propiedad $v_j \in \langle v'_j \rangle_{j'\in J'_j}$. Tenemos que J'_j es finito. Construimos un conjunto biyectivo a J en el cual podemos inyectar J', este es

$$\mathcal{J}' = \coprod_{j\in J} J'_j,$$

la unión disyunta de todos los J'_j, $j \in J$, que es una unión de conjuntos finitos indexada por J. Veamos primero que $\cup_{j\in J} J'_j = J'$. De hecho, en caso contrario, si

$$j' \in J' \setminus \bigcup_{j\in J} J'_j$$

y $S=\{v_{j_1},\ldots,v_{j_n}\}\subseteq\mathcal{B}_V$ es tal que $v_{j'}\in\langle S\rangle$, entonces

$$v_{j'}\in\langle v_{k'}\rangle_{k'\in\bigcup_{k=1}^{n}J'_{j_k}}\leq\langle v_{k'}\rangle_{k'\in J'\setminus\{j'\}},$$

violando la independencia lineal de $\mathcal{B}'_V=\{v_{k'}\}_{k'\in J'}$. Luego como $\cup_{j\in J}J'_j=J'$, en $\mathcal{J}'$ podemos inyectar J', y, así también, en J. Simétricamente podemos inyectar J en J'. Luego, por el Teorema de Schroeder-Bernstein J y J' son biyectivos.

Observación 1.50 (Dimensión arbitraria y descomposición del dominio)**.** El teorema según el cual, cuando el dominio de una aplicación lineal tiene dimensión finita, la suma de las dimensiones del nucleo y de la imagen coinciden con la dimensión del espacio de salida se demostró descomponiendo su base. Esta es la base para su generalización. Sea $f\in\mathrm{Hom}_K(V,W)$, entonces existe una base de $\mathcal{B}$ de V tal que

- $\mathcal{B}=\mathcal{B}_{\ker(f)}\cup\mathcal{B}_{V/\ker(f)}$, con $\mathcal{B}_{\ker(f)}\cap\mathcal{B}_{V/\ker(f)}=\emptyset$;
- $\langle\mathcal{B}_{\ker(f)}\rangle=\ker(f)$; y,
- $f\left[\mathcal{B}_{V/\ker(f)}\right]=\left\{w\in W|\ w=f(v)\text{ para algún }v\in\mathcal{B}_{V/\ker(f)}\right\}$ es una base de $\mathrm{im}(f)$.

De hecho, basta arrancar con una base $\mathcal{B}_{\ker(f)}$ de $\ker(f)$ y extenderla a una de V (ver Observación 1.33). El resto de detalles son similares a los del teorema que generalizamos en esta observación.

Observación 1.51 (Dimensión arbitraria y transformaciones lineales)**.** Proposición 1.40 describe la libertad que se tiene a la hora de definir una transformación lineal de un espacio a otro. Dentro del mismo modo en el que se han generalizado los otros resultados demostrados sobre espacios de dimensión finita, esta proposición también se puede extender: sean $T\subseteq V$, tal que $\langle T\rangle=V$, y $F:T\to W$, entonces existe a los sumo una transformación lineal $f\in\mathrm{Hom}_K(V,W)$ tal que $f(v)=F(v)$; y, si T es además linealmente independiente, tal f existe. La demostración es fundamentalmente la misma que en el caso de base finita. Note que una versión particular de esta observación ya se usó en Observación 1.49.

1.4. Matrices

Sea K un cuerpo y U, V, W espacios vectoriales sobre K.

Definición 1.52. Sean I y J conjuntos, una *matriz $I\times J$ sobre K* es una función

$$\begin{array}{rcl}A:I\times J&\longrightarrow&K\\(i,j)&\longmapsto&a_{(i,j)},\end{array}$$

es decir un elemento de $K^{I\times J}$ tal que para cada $j \in J$, $a_{(i,j)} = 0$ para todo $i \in I$ salvo para un número finito. Al conjunto de matrices $I \times J$ lo denotamos por $M_{I\times J}(K)$.

Observación 1.53. Bajo las operaciones definidas en $K^{I\times J}$, $M_{I\times J}(K)$ es un subespacio de $K^{I\times J}$.

Definición 1.54. Sean $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$; y, $\mathcal{B}_V = \{v_j\}_{j\in J} \subseteq V$ y $\mathcal{B}_W = \{w_i\}_{i\in I} \subseteq W$ bases. Definimos las *matriz de f respecto a las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$* por

$$\begin{aligned} \Big[f\Big]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W} : I \times J &\longrightarrow K \\ (i,j) &\longmapsto \Big[f\Big]_{\mathcal{B}_V,(i,j)}^{\mathcal{B}_W} = \Big[f(v_j)\Big]_i^{\mathcal{B}_W}. \end{aligned}$$

(ver Observación 1.34)

Observación 1.55. Note que $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}$ de hecho es una matriz, pues $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}_V,(i,j)}^{\mathcal{B}_W} = \Big[f(v_j)\Big]_i^{\mathcal{B}_W} = 0$ para todo $i \in I$ salvo para un número finito, que vienen siendo los elementos que aparecen en la combinación lineal de $f(v)$ en términos de la base $\mathcal{B}_W$. En particular para cada $v_j \in \mathcal{B}_V$,

$$f(v_j) = \sum_{i\in I} \Big[f\Big]_{\mathcal{B}_V,(i,j)}^{\mathcal{B}_W} w_i.$$

Note que esta suma es finita. Si denotamos $A = \Big[f\Big]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}$ y $A(i,j) = a_{(i,j)}$, tenemos

$$f(v_j) = \sum_{i\in I} a_{(i,j)} w_i$$

Propiedad 1.56. *Sean $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ y $g \in \mathrm{Hom}_K(W,U)$; y, $\mathcal{B}_V = \{v_j\}_{j\in J} \subseteq V$, $\mathcal{B}_W = \{w_l\}_{l\in L} \subseteq W$ y $\mathcal{B}_U = \{u_i\}_{i\in I} \subseteq U$ bases. Entonces*

$$\begin{aligned} \Big[g\circ f\Big]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_U} : I \times J &\longrightarrow K \\ (i,j) &\longmapsto \Big[g\circ f\Big]_{T,(i,j)}^{R} = \sum_{l\in L} \Big[g\Big]_{\mathcal{B}_W,(i,l)}^{\mathcal{B}_U} \Big[f\Big]_{\mathcal{B}_V,(l,j)}^{\mathcal{B}_W}. \end{aligned}$$

Dem. Denotamos

$$A = \Big[f\Big]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}, \quad B = \Big[g\Big]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_U}, \quad C = \Big[g\circ f\Big]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_U},$$

y para cada $(i,l,j) \in I \times L \times J$

$$A(l,j) = a_{(l,j)}, \quad B(i,l) = b_{(i,l)}, \quad C(i,j) = c_{(i,j)}.$$

Así, tenemos que demostrar que para cada $(i,j) \in R \times T$,

$$c_{(i,j)} = \sum_{l \in L} b_{(i,l)} a_{(l,j)}.$$

Pero (ver Observación anterior)

$$\begin{aligned}
c_{(i,j)} &= \Big[g \circ f(v_j)\Big]_i^{\mathcal{B}_U} \\
&= \Big[g\left(f(v_j)\right)\Big]_i^{\mathcal{B}_U} \\
&= \left[g\left(\sum_{l \in L} \Big[f\Big]_{\mathcal{B}_V,(l,j)}^{\mathcal{B}_W} w_l\right)\right]_i^{\mathcal{B}_U} \\
&= \left[\sum_{l \in L} a_{(l,j)} g(w_l)\right]_i^{\mathcal{B}_U} \\
&= \left[\sum_{l \in L}\left(a_{(l,j)} \sum_{i' \in I} b_{(i',l)} u_{i'}\right)\right]_i^{\mathcal{B}_U} \\
&= \left[\sum_{i' \in I}\left(\sum_{l \in L} b_{(i',l)} a_{(l,j)}\right) u_{i'}\right]_i^{\mathcal{B}_U} \\
&= \sum_{l \in L} b_{(i,l)} a_{(l,j)}
\end{aligned}$$

□

Definición 1.57. Sean I, L y J conjuntos; y, $A \in M_{L \times J}(K)$, $B \in M_{I \times L}$. Definimos el *producto de B y A*, que denotamos por BA, como la matriz $I \times J$

$$\begin{aligned}
BA : I \times J &\longrightarrow K \\
(i,j) &\longmapsto \sum_{l \in L} b_{(i,l)} a_{(l,j)}.
\end{aligned}$$

De esta forma si $\mathcal{B}_U = \{u_i\}_{i \in I}$, $\mathcal{B}_W = \{w_l\}_{l \in L}$ y $\mathcal{B}_V = \{v_j\}_{j \in J}$ son respectivamente bases de U, W y V; y, $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ y $g \in \mathrm{Hom}_K(W,U)$,

$$\Big[g \circ f\Big]_T^R = \Big[g\Big]_S^R \Big[f\Big]_T^S$$

Observación 1.58. Si $\mathcal{B}_V = \{v_j\}_{j \in J} \subseteq V$ es una base, y $v \in V$, a la función de coordenadas $\Big[v\Big]^{\mathcal{B}_V}$ se le puede ver como una matriz $I \times \{*\}$ sobre K, donde $\{*\}$ es un conjunto unipuntual. De esta forma, si $\mathcal{B}_W = \{w_i\}_{i \in I}$ es una base de W y $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, entonces

$$\Big[f(v)\Big]^{\mathcal{B}_W} = \Big[f\Big]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W} \Big[v\Big]^{\mathcal{B}_V}.$$

En particular

$$\Big[f(v)\Big]_i^{\mathcal{B}_W} = \sum_{j\in J} \Big[f\Big]_{\mathcal{B}_V,(i,j)}^{\mathcal{B}_W} \Big[v\Big]_j^{\mathcal{B}_V}$$

Observación 1.59. Sean $\mathcal{B}_V = \{v_j\}_{j\in J} \subseteq V$ y $\mathcal{B}_W = \{w_i\}_{i\in I} \subseteq W$ bases y $A \in M_{I\times J}(K)$. De acuerdo a Observación 1.51, existe una única transformación lineal $f_A \in \operatorname{Hom}_K(V,W)$ tal que para cada $v \in V$

$$f_A(v_j) = \sum_{i\in I} a_{(i,j)} w_i$$

Definición 1.60. Sean I y J conjuntos y A una matriz $I\times J$ sobre K. Decimos que A es *invertible* si existe una matriz $B \in M_{(J\times I)}(K)$ tal que $BA = \delta_{J\times J}$ y $AB = \delta_{I\times I}$, donde

$$\delta_{J\times J}(j,j') = \begin{cases} 1 & \text{si } j = j' \\ 0 & \text{si } j \neq j' \end{cases} \qquad \delta_{I\times I}(i,i') = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i' \\ 0 & \text{si } i \neq i' \end{cases}$$

Propiedad 1.61 (Unicidad de la inversa)**.** *Sean I y J conjuntos y $A \in M_{I\times J}$ una matriz invertible. Si $B, C \in M_{J\times I}$ son tales que $BA = \delta_{J\times J} = CA$ y $AB = \delta_{I\times I} = AC$ entonces $B = C$. Más aún, en tal caso, existe una biyección entre I y J.*

Dem. Denote $V = \left(K^J\right)_0$ y $W = \left(K^I\right)_0$, defina las transformaciones $f_A \in \operatorname{Hom}_K(V,W)$ y $f_B, f_C \in \operatorname{Hom}_K(W,V)$ de forma que para todo $j \in J$, $f_A(\delta_j) = \sum_{i\in I} a_{(i,j)}\delta_i$; y, para todo $i \in I$, $f_B(\delta_i) = \sum_{j\in J} b_{(j,i)}\delta_j$ y $f_C(\delta_i) = \sum_{j\in J} c_{(j,i)}\delta_j$. De esta forma $f_B = (f_A)^{-1} = f_C$, luego $b_{(j,i)} = c_{(j,i)}$ para todo $(j,i) \in J\times I$. En particular $V \simeq_K W$ bajo f_A. La biyección entre I y J sigue de Observación 1.49.

Observación 1.62. En vista de la unicidad de la inversa, a la inversa de A la denotamos por A^{-1}

Proposición 1.63. *Sean $\mathcal{B}_V = \{v_j\}_{j\in J} \subseteq V$ y $\mathcal{B}_W = \{w_i\}_{i\in I} \subseteq W$ bases; y, $f \in \operatorname{Hom}_K(V,W)$ y $A \in M_{I\times J}(K)$. Entonces*

1. *f es un isomorfismo si y solo si $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}$ es invertible; y,*
2. *A es invertible si y solo si f_A es un isomorfismo.*

Dem. Si f es un isomorfismo entonces $\Big[f^{-1}\Big]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}$ es la inversa de $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}$. Por otro lado si $B \in M_{J\times I}(K)$ es la inversa de $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}$, $f_B \in \operatorname{Hom}_K(W,V)$ es la inversa de f. Similarmente, si A es invertible y $B \in M_{J\times I}(K)$ es la inversa de A, $f_B \in \operatorname{Hom}_K(W,V)$ es la inversa de f_A. Finalmente, Si f_A es un isomorfismo entonces $\Big[(f_A)^{-1}\Big]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}$ es la inversa de A. $\square$

Definición 1.64. Sean $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in I}$ y $\mathcal{B}' = \{v_i'\}_{i\in I}$ dos bases de V, llamamos a la matriz $\left[\mathrm{id}_V\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ *matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$* donde id_V es el operador identidad en V:

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_V : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto v \end{aligned}$$

Propiedad 1.65. *Sean $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in I}$ y $\mathcal{B}' = \{v_i'\}_{i\in I}$ dos bases de V, entonces* $\left(\left[\mathrm{id}_V\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \left[\mathrm{id}_V\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$

Dem. Como $\mathrm{id}_V = \mathrm{id}_V \circ \mathrm{id}_V$, entonces $\left[\mathrm{id}_V\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left[\mathrm{id}_V\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\left[\mathrm{id}_V\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ y $\left[\mathrm{id}_V\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = \left[\mathrm{id}_V\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\left[\mathrm{id}_V\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$. La prueba se completa al verificar que $\left[\mathrm{id}_V\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \delta_{I\times I} = \left[\mathrm{id}_V\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$. □

Observación 1.66. Sean $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in I}$ y $\mathcal{B}' = \{v_i'\}_{i\in I}$ dos bases de V entonces para todo $(i,j) \in I \times I$

$$\left[\mathrm{id}_V\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(i,j) = \left[v_j\right]^{\mathcal{B}'}(i).$$

En particular, si V tiene dimensión finita y $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ entonces

$$\left[\mathrm{id}_V\right]^{\mathcal{B}'} = \left[\left[v_1\right]^{\mathcal{B}'}\Big|\dots\Big|\left[v_n\right]^{\mathcal{B}'}\right].$$

Propiedad 1.67. *Sea $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_V' \subseteq V$ y $\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_W' \subseteq W$ bases y $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Entonces*

$$\left[f\right]_{\mathcal{B}_V'}^{\mathcal{B}_W'} = \left[\mathrm{id}_W\right]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_W'}\left[f\right]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}\left[\mathrm{id}_V\right]_{\mathcal{B}_V'}^{\mathcal{B}_V}$$

Dem. Basta observar que $f = \mathrm{id}_W \circ f \circ id_V$. □

Observación 1.68. En particular, si f es un operador lineal en V, es decir $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$ y $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subseteq V$ son bases; y denotamos

$$A = \left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}, \quad B = \left[f\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}, \text{ y } \quad C = \left[\mathrm{id}_V\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$

entonces

$$B = C^{-1}AC.$$

Ejemplo 1.69. Suponga que $\mathrm{char}(K) \neq 2$, de forma que $-1 \neq 1$. Sea $f \in \mathrm{Hom}_K\left(K^2, K^2\right)$ el operador definido por

$$f(x,y) = (y,x).$$

Si $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$ es la base canónica entonces

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y si $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$ tenemos

$$[\mathrm{id}_{K^2}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

luego

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} &= [\mathrm{id}_{K^2}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\,[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\,[\mathrm{id}_{K^2}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{(-1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.5. Suma y producto directo

Sea K un cuerpo y V un espacio vectorial sobre K.

Definición 1.70. Sean $V_1, \ldots, V_n \leq V$, definimos su *suma* como el conjunto

$$V_1 + \ldots + V_n = \sum_{i=1}^{n} V_i = \{v_1 + \ldots + v_n \in V \mid v_i \in V_i, i = 1, \ldots, n\}$$

Propiedad 1.71. *Sean $V_1, \ldots, V_n \leq V$, entonces $V_1 + \ldots + V_n \leq V$.*

Dem. Usamos Propiedad 1.8. Primero note que $V_1 + \ldots + V_n$ contiene al origen. Tome $v, v' \in V_1 + \ldots + V_n$ y $c \in K$. Sean $v_i, v_i' \in V_i$, $i = 1, \ldots, n$ tales que

$$v = v_1 + \ldots + v_n, \qquad v' = v_1' + \ldots + v_n'.$$

Luego $v + v' = (v_1 + v_1') + \ldots + (v_n + v_n')$, y así, como $v_i + v_i' \in V_i$, $i = 1, \ldots, n$, $v + v' \in V_1 + \ldots + V_n$. Igualmente, como $av_i \in V_i$, $i = 1, \ldots, n$, $cv = cv_1 + \ldots + cv_n \in V_1 + \ldots + V_n$. $\square$

Teorema 1.72. *Si $V_1, V_2 \leq V$ tienen dimensión finita, también la tienen $V_1 \cap V_2$ y $V_1 + V_2$. Más aún*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2),$$

o equivalentemente,

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

Dem. Como V_1 tiene dimensión finita, y $V_1 \cap V_2 \leq V_1$, entonces $V_1 \cap V_2$ también tiene dimensión finita (Teorema 1.32). Sean $n_1 = \dim(V_1)$, $n_2 = \dim(V_2)$, $p = \dim(V_1 \cap V_2)$ y $\{v_1, \ldots, v_p\}$ una base de $V_1 \cap V_2$. Extendemos esta base a una de V_1

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_p, v'_{p+1}, \ldots, v'_{n_1}\},$$

y a una de V_2

$$\mathcal{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_p, v''_{p+1}, \ldots, v''_{n_2}\}.$$

Así $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_p, v'_{p+1}, \ldots, v'_{n_1}, v''_{p+1}, \ldots, v''_{n_2}\}$ genera $V_1 + V_2$, luego este subespacio tiene dimensión finita. El teorema se sigue si demostramos que $\mathcal{B}$ es una base, para esto basta demostrar que es linealmente independiente. Usamos Proposición 1.24. Sean $a_1, \ldots, a_p, a'_{p+1}, \ldots, a'_{n_1}, a''_{p+1}, \ldots, a''_{n_2}$ tales que

$$0 = \sum_{i=1}^{p} a_i v_i + \sum_{i=p+1}^{n_1} a'_i v'_i + \sum_{i=p+1}^{n_2} a''_i v''_i.$$

Luego si

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} a_i v_i + \sum_{i=p+1}^{n_1} a'_i v'_i}_{\in\ V_1} = - \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n_2} a''_i v''_i}_{\in\ V_2}$$

entonces $v \in V_1 \cap V_2$. Sean así $b_1 \ldots, b_p \in K$ tales que

$$v = b_1 v_1 + \ldots + b_p v_p,$$

entonces

$$0 = v - v = \sum_{i=1}^{p} (a_i - b_i) v_i + \sum_{i=p+1}^{n_1} a'_i v'_i$$

y por independencia lineal de $\mathcal{B}_1$, $a'_{p+1} = \ldots = a'_{n_1} = 0$. Luego

$$0 = \sum_{i=1}^{p} a_i v_i + \sum_{i=p+1}^{n_2} a''_i v''_i$$

y por independencia lineal de $\mathcal{B}_2$, $a_1 = \ldots = a_p = a''_{p+1} = \ldots = a_{n_2} = 0$. $\square$

Observación 1.73. Note que si i, s, n_1, n_2 son tales que $i \leq n_1 \leq n_2 \leq s$ y s es menor que la dimensión de V, entonces existen $V_1, V_2 \leq V$ tales que $\dim(V_1) = n_1$, $\dim(V_2) = n_2$, $\dim(V_1 \cap V_2) = i$ y $\dim(V_1 + V_2) = s$, siempre que

$$n_1 + n_2 = s + i.$$

De hecho si $S \subseteq V$ es una colección de s vectores linealmente independientes $S = \{v_1, \ldots, v_s\}$, basta tomar

$$V_1 = \langle v_1, \ldots, v_{n_1} \rangle \qquad V_2 = \langle v_1, \ldots, v_i, v_{n_1+1}, \ldots, v_s \rangle.$$

Más aún, si $V'_1, V'_2 \leq V$ son también tales que $\dim(V'_1) = n_1$, $\dim(V'_2) = n_2$, $\dim(V'_1 \cap V'_2) = i$ y $\dim(V'_1 + V'_2) = s$, entonces existe un automorfismo $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ tal que $f(V_1) = V'_1$ y $f(V_2) = V'_2$.

Definición 1.74. Sean $V_1, V_2 \leq V$. Decimos que V_1 y V_2 están en *posición general* si $\dim(V_1 + V_2)$ es tan grande y $\dim(V_1 \cap V_2)$ es tan pequeño como lo es posible.

Ejemplo 1.75. Dos subespacios bidimensional de un espacio tridimensional están en posición general si su intersección es un espacio unidimensional. Dos subespacio cuatridimensional de un espacio sexadimensional están en posición general si su intersección es un espacio bidimensional. Dos subespacios tridimensionales en un espacio septadimensional están en posición general si su intersección es trivial.

Definición 1.76. Sean $V_1, \ldots, V_n \leq V$, decimos que V es la *suma directa* de $V_1, \ldots, V_n$, lo cual denotamos por

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$$

si para cada $v \in V$ existe un único $(v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \ldots \times V_n$ tal que

$$v = v_1 + \ldots + v_n$$

Propiedad 1.77. *Sean $V_1, \ldots, V_n \leq V$, entonces $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ si y solo si*

1. $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$*; y,*
2. $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$*, para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Dem. Suponga primero que $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$, luego por definición $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$. Por otro lado, sea $i \in \{1, \ldots, n\}$ y tome $v \in V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j$. Así, existe $(v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \ldots \times V_n$ tal que $v = -v_i = \sum_{j \neq i} v_j$, luego $0 = v_1 + \ldots + v_n$. Pero por otro lado $(0, \ldots, 0) \in V_1 \times \ldots \times V_n$ es tal que $0 = 0 + \ldots + 0$, luego por unicidad esta descomposición $v_1 = \ldots = v_n = 0$, y $v = \{0\}$.
Recíprocamente, suponga que $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$ y $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$ y sea $v \in V$. Entonces existe $(v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \ldots \times V_n$ tal que $v = v_1 + \ldots + v_n$, y veamos que esta descomposición es única. De hecho, si $(v_1', \ldots, v_n') \in V_1 \times \ldots \times V_n$ es tal que $v = v_1' + \ldots + v_n'$, dado $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\underbrace{v_i - v_i'}_{\in\ V_i} = \underbrace{\sum_{j \neq i} (v_j' - v_j)}_{\in\ \sum_{j \neq i} V_j}.$$

Luego $v_i - v_i' \in V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$, es decir $v_i - v_i' = 0$ y así $v_i = v_i'$. □

Proposición 1.78. *Sean $V_1, \ldots, V_n \leq V$ y suponga que V tiene dimensión finita. Entonces la siguientes propiedades son equivalentes:*

1. $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$ *y* $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$*, para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$*; y,*
2. $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$ *y* $\sum_{i=1}^{n} \dim(V_i) = \dim(V)$.

Dem. Suponga primero que $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$ y $V_i \cap \sum_{j\neq i} V_j = \{0\}$, para todo $i \in \{1,\dots,n\}$. Entonces si $n_1 = \dim(V_1)$ y $s_1 = \dim\left(\sum_{j>1} V_j\right)$, por Teorema 1.72, $\dim(V) = n_1+s_1$. Ahora, como $\left(V_2 \cap \sum_{j>2} V_j\right) \subseteq \left(V_2 \cap \sum_{j\neq 2} V_j\right) = \{0\}$, entonces, si $n_2 = \dim(V_2)$ y $s_2 = \dim\left(\sum_{j>2} V_j\right)$, por Teorema 1.72, $s_1 = n_2+s_2$ y $\dim(V) = n_1 + n_2 + s_2$. Inductivamente, obtenemos

$$\dim(V) = \sum_{i=1}^{n} \dim(V_i).$$

Suponga ahora que $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$ y $\sum_{i=1}^{n} \dim(V_i) = \dim(V)$. Tenemos por Teorema 1.72

$$\begin{aligned}
\dim(V) &\leq \dim(V_1) + \dim\left(\sum_{j>1} V_j\right)\\
&\leq \dim(V_1) + \dim(V_2) + \dim\left(\sum_{j>2} V_j\right)\\
&\vdots\\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \dim(V_i) = \dim(V).
\end{aligned}$$

De donde $\dim(V) = \dim(V_1) + \dim\left(\sum_{j>1} V_j\right)$, luego $\dim\left(V_1 \cap \sum_{j\neq 1} V_j\right) = 0$. Es decir $V_1 \cap \sum_{j\neq 1} V_j = \{0\}$. Reordenando los subespacios V_i, $i = 1,\dots,n$, obtenemos $V_i \cap \sum_{j\neq i} V_j = \{0\}$, para todo $i \in \{1,\dots,n\}$. □

Definición 1.79. Sea $p \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$ un operador lineal. Decimos que p es una *proyección* si $p \circ p = p$.

Observación 1.80. Si $p \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$ es una proyección y $V_0 = p(V)$ entonces $p(v_0) = v_0$ para todo $v_0 \in V_0$. De hecho si $v_0 \in V_0$, existe $v \in V$ tal que $p(v) = v_0$, luego $p(v_0) = p \circ p(v) = p(v) = v_0$.

Observación 1.81. Si $V = V_1 \oplus V_2$, defina

$$\begin{array}{rcl} p_1 : V & \longrightarrow & V \\ v & \longmapsto & v_1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} p_2 : V & \longrightarrow & V \\ v & \longmapsto & v_2, \end{array}$$

donde $(v_1,v_2) \in V_1 \times V_2$ es tal que $v = v_1+v_2$. Note que p_1 y p_2 son proyecciones tales que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$ y $p_1 + p_2 = \mathrm{id}_V$. Igualmente, si $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$, podemos definir n proyecciones $p_1,\dots,p_n$, con $p_i(V) = V_i$, para cada $i = 1,\dots,n$, tales que $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{id}_V$, y $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$. Esto es una forma de caracterizar sumas directas, como lo sugiere el siguiente teorema.

Teorema 1.82. *Sean $p_1, \dots, p_n \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ proyecciones y $V_i = p_i(V)$, para $i = 1, \dots, n$. Si estas proyecciones son tales que:*

1. $\sum_{i=1}^n p_i = \mathrm{id}_V$, *y*
2. $p_i \circ p_j = 0$ *si* $i \neq j$,

entonces $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$.

Dem. Usamos Propiedad 1.77 para establecer este teorema. Sea $v \in V$ y $v_i = p_i(v) \in V_i$, $i = 1, \dots, n$. Luego

$$v = \mathrm{id}_V(v) = \sum_{i=1}^n p_i(v) = \sum_{i=1}^n v_i,$$

de donde $V = \sum_{i=1}^n V_i$.
Tome $i \in \{1, \dots, n\}$, y suponga que $v \in V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j$. Como $v \in \sum_{j \neq i} V_j$, $v = \sum_{j \neq i} v_j$, con $v_j \in V_j$, $j \neq i$. Es decir, teniendo $V_j = p_j(V)$, existe $v_j' \in V$ tal que $v_j = p_j(v_j')$, para cada $j \neq i$, y así $v = \sum_{j \neq i} p_j(v_j)$. Por otro lado, como $v \in V_i$, existe $v_i' \in V$ tal que $v = p_i(v_i')$. Entonces

$$v = p_i(v_i') = p_i \circ p_i(v_i') = p_i(v) = p_i\left(\sum_{j \neq i} p_j(v_j)\right) = \sum_{j \neq i} p_i \circ p_j(v_j) = 0.$$

Así $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$. □

Definición 1.83. Sea I una colección de indices y $\{V_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre K. Definimos:

1. el *producto externo* de $\{V_i\}_{i \in I}$ por

$$\prod_{i \in I} V_i = \left\{ \phi : I \to \coprod_{i \in I} V_i \;\middle|\; \phi(i) \in V_i \right\},$$

el cual es un espacio vectorial sobre K bajo las operaciones

$$(\phi + \psi)(i) = \phi(i) + \psi(i) \qquad (a\phi)(i) = a\psi(i)$$

para todo $\phi, \psi \in \prod_{i \in I} V_i$ y $a \in K$; y,

2. la *suma directa externa* de $\{V_i\}_{i \in I}$ por

$$\bigoplus_{i \in I} V_i = \left\{ \phi \in \prod_{i \in I} V_i \middle|\; \phi(i) \neq 0 \text{ únicamente para finitos indices } i \in I \right\},$$

el cual es un subespacio de $\prod_{i \in I} V_i$.

Si además $\{W_i\}_{i \in I}$ es otra familia de espacios vectoriales sobre K, y para cada $i \in I$ tenemos un $f_i \in \mathrm{Hom}_K(V_i, W_i)$, definimos:

1. el *producto externo* de $\{f_i\}_{i\in I}$ por

$$\begin{array}{rcl} \prod_{i\in I} f_i : \prod_{i\in I} V_i & \longrightarrow & \prod_{i\in I} W_i \\ \phi & \longmapsto & \left(\prod_{i\in I} f_i\right)(\phi) : i \mapsto f_i\left(\phi(i)\right), \end{array}$$

   el cual es una transformación lineal; y,

2. la *suma directa externa* de $\{f_i\}_{i\in I}$ por

$$\begin{array}{rcl} \bigoplus_{i\in I} f_i : \bigoplus_{i\in I} V_i & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in I} W_i \\ \phi & \longmapsto & \left(\prod_{i\in I} f_i\right)(\phi) : i \mapsto f_i\left(\phi(i)\right), \end{array}$$

   la cual es la transformación lineal inducida por $\prod_{i\in I} f_i$ entre los subespacios $\bigoplus_{i\in I} V_i$ y $\bigoplus_{i\in I} W_i$.

Observación 1.84. Note que si $\{V_i\}_{i\in I}$ es una colección de espacios vectoriales sobre K indexada por los indices $i \in I$; y, $f_i \in \mathrm{Hom}_K(V, V_i)$ y $g_i \in \mathrm{Hom}_K(V_i, V)$, para todo $i \in I$, podemos definir las transformaciones lineales

$$\begin{array}{rcl} f : V & \longrightarrow & \prod_{i\in I} V_i \\ v & \longmapsto & f(v) : i \mapsto f_i(v) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \bigoplus_{i\in I} V_i & \longrightarrow & V \\ \phi & \longmapsto & \sum_{i\in I} g_i\left(\phi(i)\right). \end{array}$$

Note que la suma $\sum_{i\in I} g_i\left(\phi(i)\right)$ es finita pues $\phi(i) = 0$ para todos los $i \in I$ salvo un número finito de indices.

Observación 1.85. Note que, si $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in I} \subseteq V$ es una base, entonces

$$V \simeq_K \left(K^I\right)_0 \simeq_K \bigoplus_{i\in I} K,$$

y

$$K^I \simeq_K \prod_{i\in I} K$$

1.6. Espacios cocientes

Sea K un cuerpo y V, W espacios vectoriales sobre K.

Definición 1.86. Sean $V_0 \leq V$ y $v \in V$. Definimos la *translación de V_0 por v* como el conjunto

$$v + V_0 = \{v' \in V \mid v' = v + v_0,\ v_0 \in V\}.$$

Observación 1.87. Tenemos $v + V_0 = v' + V_0$ si y solo si $v - v' \in V_0$. De hecho, si $v + V_0 = v' + V_0$, como $v \in v + V_0 = v' + V_0$, existe $v_0 \in V_0$ tal que $v = v' + v_0$, es decir $v - v' = v_0 \in V_0$; recíprocamente, si $v_0 = v - v' \in V_0$, cualquier $w \in v + V_0$ es de la forma $w = v + w_0$ para algún $w_0 \in V_0$, en particular $w = v' + (v_0 + w_0) \in v' + V_0$, y cualquier $w' \in v' + V_0$ es de la forma $w' = v' + w_0'$ para algún $w_0' \in V_0$, en particular $w' = v + (w_0' - v_0) \in v + V_0$.

Definición 1.88. Sea $V_0 \leq V$, el *espacio cociente* V *módulo* V_0 es el conjunto de traslaciones de V_0:

$$V/V_0 = \{v + V_0 \mid v \in V\}$$

Proposición 1.89. *Sean* $V_0 \leq V$, $v, w, v', w' \in V$ *y* $a \in K$. *Si* $v + V_0 = w + V_0$ *y* $v' + V_0 = w' + V_0$ *entonces* $(v + v') + V_0 = (w + w') + V_0$ *y* $av + V_0 = aw + V_0$.

Dem. $v + V_0 = w + V_0$ y $v' + V_0 = w' + V_0$ si y solo si $v - w \in V_0$ y $v' - w' \in V_0$, en tal caso $(v + v') - (w + w') = (v - w) + (v' - w') \in V_0$, es decir $(v + v') + V_0 = (w + w') + V_0$, y $av - aw = a(v - w) \in V_0$, es decir $av + V_0 = aw + V_0$. □

Propiedad 1.90. *Sea* $V_0 \leq V$. *El espacio cociente* V/V_0 *es un espacio vectorial sobre* K *bajo las operaciones*

$$(v + V_0) + (v' + V_0) = (v + v') + V_0 \qquad a\,(v + V_0) = av + V_0,$$

y su origen es $0 + V_0 = V_0$. *El mapa*

$$\begin{array}{rcl} \pi_{V_0} : V & \longrightarrow & V/V_0 \\ v & \longmapsto & v + V_0 \end{array}$$

es una transformación lineal sobreyectiva con $\ker(\pi_{V_0}) = V_0$

Dem. La proposición anterior garantiza que tales operaciones están bien definidas, las propiedades de estas en Definición 1.1 se heredan de las de V. La misma proposición implica la linearidad de π_{V_0}. Por definición de V/V_0, π_{V_0} es sobreyectiva. Por último, $v \in \ker(\pi_{V_0})$ si y solo si $\pi_{V_0}(v) = V_0$, es decir si y solo si $v + V_0 = V_0$, o si y solo si $v \in V_0$. □

Propiedad 1.91. *Sea* $V_0 \leq V$ *y suponga que* V *tiene dimensión finita, entonces*

$$\dim(V/V_0) = \dim(V) - \dim(V_0)$$

Dem. Se sigue inmediatamente de Teorema 1.47 y de la propiedad anterior.

Teorema 1.92. *Sean* $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ *y* $V_0 = \ker(f)$. *Entonces existe una única transformación lineal* $f_{V_0} \in \mathrm{Hom}_K(V/V_0, W)$ *tal que* $f = f_{V_0} \circ \pi_{V_0}$. *La transformación* f_{V_0} *es inyectiva, y, si* f *es además sobreyectiva,* f_{V_0} *es un isomorfismo.*

Dem. Note que $f(v) = f(v')$ si y solo si $v - v' \in V_0$, es decir si y solo si $v + V_0 = v' + V_0$. Defina entonces

$$\begin{array}{rcl} f_{V_0} : V/V_0 & \longrightarrow & W \\ v + V_0 & \longmapsto & f(v). \end{array}$$

Así, f_{V_0} es lineal pues f lo es, y además es inyectiva pues $f(v) = f(v')$ si y solo si $v + V_0 = v' + V_0$. Por contrucción $f = f_{V_0} \circ \pi_{V_0}$. Ahora si f es sobreyectiva, entonces f_{V_0} es biyectiva y así un isomorfismo. $\square$

Capítulo 2

Estructura de las transformaciones lineales

Sea K un cuerpo y V, W espacios vectoriales sobre K.

Notación 2.1. Suponga que V y W tienen dimensión finita y denote $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$. Sean $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ y $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\} \subseteq W$ bases. Dada $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, la matriz $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$

$$A = \Big[f\Big]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W},$$

que representa a f respecto a las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$, se denota por un arreglo rectangular $m \times n = |\mathcal{B}_W| \times |\mathcal{B}_V|$, con entradas en K, cuya ij-ésima entrada es

$$a_{ij} = \Big[f(v_j)\Big]_i^{\mathcal{B}_W}.$$

De forma que

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i.$$

En tal caso identificaremos a la matriz A con el arreglo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Igualmente, a las matrices $\{1, \dots, n\} \times \{*\}$ y $\{1, \dots, m\} \times \{*\}$ de coordenadas en las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$ las identificaremos con los arreglos $n \times 1$ y $m \times 1$ con entradas en K, de tal forma que para $v \in V$ y $w \in W$ escribimos

$$\Big[v\Big]^{\mathcal{B}_V} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \qquad \Big[w\Big]^{\mathcal{B}_W} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix},$$

cuando $v = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$ y $w = \sum_{i=1}^{m} d_i w_i$. En particular

$$\Big[f(v)\Big]^{\mathcal{B}_W} = \Big[f\Big]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W} \Big[v\Big]^{\mathcal{B}_V} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_j a_{1j} c_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{mj} c_j \end{bmatrix}.$$

A los arreglos $m \times n$ los llamaremos también *matrices* $m \times n$ y el espacio de estas lo denotamos por $M_{m \times n}(K)$.

Observación 2.2. Sean $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ y $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{n}$ matrices $n \times n$, entonces

$$\operatorname{tr}(AC) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} a_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} a_{ji} = \operatorname{tr}(CA).$$

Ahora, si V tiene dimensión finita igual a n, y $f \in \operatorname{Hom}_K(V, V)$, dadas dos bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subseteq V$, tenemos dos matrices $n \times n$ que representan a f, $A = \Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ y $B = \Big[f\Big]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$. Entonces, si además $C = \Big[\operatorname{id}_V\Big]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$,

$$B = C^{-1} A C,$$

y

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(B) &= \operatorname{tr}(C^{-1} A C) = \operatorname{tr}(A C C^{-1}) \\ &= \operatorname{tr}(A) \\ \det(B) &= \det(C^{-1} A C) = \det(C)^{1} \det(A) \det(C) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

Es decir la traza y el determinante de una matriz de representación de un operador lineal, respecto a la misma base para el dominio y el rango, es independiente de la base escogida.

Definición 2.3. Suponga que V tiene dimensión finita, sean $f \in \operatorname{Hom}_K(V, V)$ y $\mathcal{B} \subseteq V$ una base. Definimos el *determinante* y la *traza* de f respectivamente por

$$\det(f) = \det\left(\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right) \qquad \operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}\left(\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right).$$

2.1. Descomposición directa

Definición 2.4. Sean $V_1, V_2 \leq V$, decimos que V_1 y V_2 forman una *descomposición directa* de V si $V = V_1 \oplus V_2$.

Teorema 2.5. *Sea $f \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$. Entonces existe descomposiciones directas $V = V_0 \oplus V_1$ y $W = W_1 \oplus W_2$ tales que $\ker(f) = V_0$, $\operatorname{im}(f) = W_1$. En particular f induce un isomorfismo entre V_1 y W_1.*

Dem. Sea $\mathcal{B}_0$ una base de $V_0 = \ker(f)$, la cual extendemos a una base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$ de V. Defina $V_1 = \langle \mathcal{B}_1 \rangle$. Así pues $V_0 + V_1 = V$ y $V_0 \cap V_1 = \{0\}$, en particular $V = V_0 \oplus V_1$. Por otro lado, si $v, v' \in V_1$ son tales que $f(v) = f(v')$, entonces $v - v' \in \ker(f) = V_0$, luego $v - v' \in V_0 \cap V_1 = \{0\}$, luego $v = v'$. Es decir la restricción de f a V_1 es inyectiva.
Sea $\mathcal{B}_1' = f(\mathcal{B}_1)$. Como f es inyectiva en V_1, es decir $f(v) = 0$ con $v \in V_1$ si y solo si $v = 0$, $\mathcal{B}_1'$ es linealmente independiente. Defina $W_1 = \langle \mathcal{B}_1' \rangle$, de forma que $\mathcal{B}_1'$ es una base de W_1 y $W_1 = f(V_1)$. Por construcción $\mathrm{im}(f) = W_1$; pues, dado $w \in \mathrm{im}(f)$, existe $v \in V$ tal que $w = f(v)$, si $v = v_0 + v_1$ con $(v_0, v_1) \in V_0 \times V_1$, $w = f(v) = f(v_0) + f(v_1) = f(v_1)$. Finalmente, extienda $\mathcal{B}_1'$ a una base $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1' \cup \mathcal{B}_2'$ de W. Si $W_2 = \langle \mathcal{B}_2' \rangle$, $V = V_0 \oplus V_1$ y $W = W_1 \oplus W_2$ son las descomposiciones directas buscadas. Como f es inyectiva en V_1 y $f(V_1) = W_1$, f induce un isomorfismo entre V_1 y W_1. $\square$

Corolario 2.6. *Suponga que V y W tienen dimensión finita, sea $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, y denote $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$ y $r = \dim(\mathrm{im}(f))$. Entonces existen bases $\mathcal{B} = \{v_j\}_{j=1}^n \subseteq V$ y $\mathcal{B}' = \{w_i\}_{i=1}^m \subseteq W$ tales que, si*

$$A = \Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = (a_{ij}),$$

$a_{ii} = 1$ si $0 \leq i \leq r$ y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, o si $r < i$ e $i = j$. Es decir

$$A = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

donde I_r denota la matriz $r \times r$ con unos en diagonal y ceros en el resto de entradas y 0 los orígenes de $M_{r\times(n-r)}(K)$, $M_{(m-r)\times r}(K)$ y $M_{(m-r)\times(n-r)}(K)$.

Dem. Tome $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1'$ y $\mathcal{B}_2'$ como en la prueba del teorema, y denote $v_1, \ldots, v_n \in V$ y $w_1, \ldots, w_m \in W$ de forma que

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_r\}, \mathcal{B}_0 = \{v_{r+1}, \ldots, v_n\}, \mathcal{B}_1' = \{w_1, \ldots, w_r\}, \mathcal{B}_2' = \{w_{r+1}, \ldots, v_m\}.$$

Las bases $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ son tales que $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ tiene la forma buscada. $\square$

2.2. Espacios invariantes y espacios propios

Definición 2.7. Sean $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ y $V_0 \leq V$. Decimos que V_0 es *invariante bajo* f si $f(V_0) \subseteq V_0$. La restricción de f a V_0 la denotamos f_{V_0}, es decir $f_{V_0} \in \mathrm{Hom}_K(V_0, V_0)$ es el operador definido por:

$$\begin{array}{rcl} f_{V_0} : V_0 & \longrightarrow & V_0 \\ v_0 & \longmapsto & f(v_0) \end{array}$$

Definición 2.8. Sean I un conjunto y $A \in M_{I\times I}(K)$. Decimos que A es *diagonal* si $A(i,j) = 0$ siempre que $i \neq j$. Sea $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$, decimos que f es diagonalizable si $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ es diagonal para alguna base $\mathcal{B}$ de V.

Teorema 2.9. *Sea $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$. Entonces f es diagonalizable si y solo si existe una familia $\{V_i\}_{i\in I}$ de subespacios unidimensional de V, invariantes bajo f, tal que $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$.*

Dem. Note primero que si $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in I} \subseteq V$ es una base, entonces

$$V = \bigoplus_{i\in I} \langle v_i\rangle.$$

Suponga primero que f es diagonalizable y sea $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in I} \subseteq V$ base tal que $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ es diagonal. Para cada $i \in I$ defina $V_i = \langle v_i\rangle$. Ahora, dados $i, j \in I$,

$$\Big[f(v_j)\Big]_i^{\mathcal{B}} = \sum_{l\in I} \Big[f\Big]_{\mathcal{B},(i,l)}^{\mathcal{B}} \Big[v_j\Big]_l^{\mathcal{B}} = \Big[f\Big]_{\mathcal{B},(i,j)}^{\mathcal{B}}.$$

Así, como $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ es diagonal,

$$f(v_j) = \sum_{i\in I} \Big[f(v_j)\Big]_i^{\mathcal{B}} v_i = \sum_{i\in I} \Big[f\Big]_{\mathcal{B},(i,j)}^{\mathcal{B}} v_i = \Big[f\Big]_{\mathcal{B},(j,j)}^{\mathcal{B}} v_j,$$

es decir que si $\lambda_j = \Big[f\Big]_{\mathcal{B},(j,j)}^{\mathcal{B}}$, entonces $f(v_j) = \lambda_j v_j \in V_j$, luego V_j es invariante bajo f. De donde

$$V = \bigoplus_{j\in I} V_j$$

es una descomposición de V en espacios unidimensional invariantes bajo f.
Suponga ahora que $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$, donde $\{V_i\}_{i\in I}$ es una familia subespacios unidimensional de V invariantes bajo f. Para cada $i \in I$ sea $v_i \in V_i$, con $v_i \neq 0$, de tal forma que $V_i = \langle v_i\rangle$. Luego

$$\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in I},$$

es una base de V; y, además, como cada V_i es invariante bajo f y unidimensional, $f(v_i) = \lambda_i v_i$ para algún $\lambda_i \in K$. Así pues

$$\Big[f\Big]_{\mathcal{B},(i,j)}^{\mathcal{B}} = \Big[f(v_j)\Big]_i^{\mathcal{B}} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

es decir $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ es diagonal. $\square$

Definición 2.10. Sea $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$ y $V_0 \leq V$ con $\dim(V_0) = 1$. Decimos que V_0 es un *espacio propio* de f si V_0 es invariante bajo f. En tal caso, a los elementos en V_0 diferentes del origen los llamamos *vectores propios* de f. Dado un vector propio v en V_0, existe $\lambda \in K$ tal que $f(v) = \lambda v$; a este λ lo llamamos *valor propio* (asociado a V_0 o a v) de f. Igualmente en tal caso, decimos que V_0 es un espacio propio (ó v es un vector propio) asociado a λ.

Observación 2.11. Del mismo modo en que definimos arreglos $m \times n$, donde n y m son enteros positivos, con entradas en K, podemos definir arreglos $m \times n$ con entradas en conjunto de polinomios con coeficientes en K en la variable t. A este conjunto lo denotaremos $M_{m\times n}(K[t])$. Los elementos en $K[t]$ se pueden multiplicar y sumar entre si en base a operaciones de multiplicación y suma de K. De esta forma podemos igualmente hablar del determinante y de la traza de un matriz $n \times n$ con entradas en $K[t]$, los cuales serán igualmente polinomios en $K[t]$.

Observación 2.12. Sea $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $A \in M_{n\times n}(K)$. Dada cualquier $C \in M_{n\times n}(K)$, invertible, tenemos

$$\det(tI_n - A) = \det\left(C^{-1}(tI_n - A)C\right) = \det(tI_n - C^{-1}AC)$$

donde $tI_n - A, tI_n - C^{-1}AC \in M_{n\times n}(K[t])$. Esta observación nos permite formular la siguiente definición.

Definición 2.13. Suponga que V tiene dimensión finita y denote $n = \dim(V)$. Dado $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$, definimos el *polinomio caraterístico* de f por

$$P_f(t) = \det(tI_n - A) \in K[t]$$

donde $A = \left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, y $\mathcal{B} \subseteq V$ es una base.

Teorema 2.14. *Suponga que V tiene dimensión finita. Sean $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$ y $\lambda \in K$. Entonces, λ es un valor propio de f si y solo si $P_f(\lambda) = 0$.*

Dem. Sea $\mathcal{B} \subseteq V$ una base. El escalar $\lambda \in K$ es un valor propio de f si y solo si existe $v \in V$, con $v \neq 0$, tal que $f(v) = \lambda v$, o, equivalentemente, tal que $(\lambda \,\mathrm{id}_V - f)(v) = 0$. Es decir $\lambda \in K$ es un valor propio de f si y solo si $\lambda \,\mathrm{id}_V - f$ no es inyectiva, lo que equivale a

$$0 = \det(\lambda \,\mathrm{id}_V - f) = \det\left(\lambda I_n - \left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right) = P_f(\lambda).$$

$\square$

Definición 2.15. Sean $P(t) \in K[t]$ y $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$. Definimos el operador $P(f) \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$ por

$$P(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \ldots + a_1 f + a_0 \,\mathrm{id}_V$$

cuando $P(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$, donde para todo entero positivo k

$$f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k-\text{veces}}.$$

Observación 2.16. 1. Sea $C \in M_{m\times n}(K[t])$, donde m y n son enteros positivos, cuya ij-ésima entrada denotamos $c_{ij}(t)$. Dado $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ definimos la transformación lineal

$$C_f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n-\text{veces}} \longrightarrow \underbrace{V \times \ldots \times V}_{m-\text{veces}} \tag{2.1}$$

por

$$C_f(v_1, \ldots, v_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{1j}(f)(v_j), \ldots, \sum_{j=1}^{n} c_{mj}(f)(v_j) \right).$$

2. Note que si $C_1 \in M_{m\times n}(K[t])$ y $C_2 \in M_{l\times m}(K[t])$, donde l, m y n son enteros positivos, dado $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$,

$$(C_1C_2)_f = C_{1f} \circ C_{2f}.$$

3. Dado $B \in M_{n\times n}(K[t])$, donde n es un entero positivo, cuya ij-ésima entrada es $b_{ij}(t)$, denotamos por $\tilde{B}$ su matriz de cofactores, es decir la matriz $n \times n$ con entradas en $K[t]$ cuya ij-ésima entrada es

$$\tilde{b}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(B_{ij})$$

donde B_{ij} es el arreglo $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene a partir de B eliminando la i-ésima fila y la j-ésima columna. De tal forma que

$$B\tilde{B}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} \det(B) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(B) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(B) \end{bmatrix} = (B\tilde{B}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \tilde{B}B^{\mathsf{T}}$$

donde $\tilde{B}^{\mathsf{T}}$ es la transpuesta de $\tilde{B}$, es decir la matriz $n \times n$ cuya ij-ésima entrada es la entrada ji-ésima de $\tilde{B}$; similarlmente para B^{T} y $(B\tilde{B}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$.

Teorema 2.17 (Caley-Hamilton)**.** *Suponga que V tiene dimensión finita y sea $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$. Entonces $P_f(f) = 0$.*

Dem. Sean $n = \dim(V)$ y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ una base. Defina

$$\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

de forma que

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i.$$

Considere la matriz $B = tI_n - A \in M_{n\times n}(K[t])$. Entonces $\tilde{B}B^{\intercal} = P_f(t)I_n$. Ahora

$$\begin{aligned}
\left(B^{\intercal}\right)_f(v_1,\ldots,v_n) &= \left(f(v_1) - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{j1}v_j\right),\ldots,f(v_n) - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{jn}v_j\right)\right)\\
&= (0,\ldots,0),
\end{aligned}$$

por un lado; pero, por el otro

$$\begin{aligned}
(P_f(f)(v_1),\ldots,P_f(f)(v_n)) &= \left(P_f(t)I_n\right)_f(v_1,\ldots,v_n)\\
&= \left(\tilde{B}B^{T}\right)_f(v_1,\ldots,v_n)\\
&= \tilde{B}_f \circ \left(B^{\intercal}\right)_f(v_1,\ldots,v_n)\\
&= \tilde{B}_f(0,\ldots,0)\\
&= (0,\ldots,0).
\end{aligned}$$

Luego $\mathcal{B} \subseteq \ker(P_f(f))$ y así $P_f(f) = 0$. $\square$

Observación 2.18. Note que si $P_1(t), P_2(t) \in K[t]$, $P(t) = P_1(t)P_2(t)$ y $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$, entonces $P(f) = P_1(f) \circ P_2(f) = P_2(f) \circ P_1(f)$, pues $(af^m) \circ (bf^n) = (bf^n) \circ (af^m)$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $a, b \in K$.

Propiedad 2.19. *Sea $P(t) \in K[t]$ y $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$, entonces $V_0 = \ker(P(f))$ es invariante bajo f.*

Dem. Sea $v \in V_0$, luego $P(f)(f(v)) = P(f) \circ f(v) = f \circ P(f)(v) = f(0) = 0$. Es decir $f(v) \in \ker(P(f)) = V_0$. $\square$

Propiedad 2.20. *Sean $P(t) \in K[t]$ y $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$ tales que $P(f) = 0$. Si $P_1(t), P_2(t) \in K[t]$ son tales que $P(t) = P_1(t)P_2(t)$ y $(P_1(t), P_2(t)) = 1$, entonces*

$$V = V_1 \oplus V_2$$

donde $V_1 = \ker(P_1(f))$ y $V_2 = \ker(P_2(f))$. Más aún V_1 y V_2 son invariantes bajo f y existen polinomios $\Pi_1(t), \Pi_2(t) \in K[t]$, tales que

$$\Pi_1(f) = p_1 \qquad y \qquad \Pi_2(f) = p_2$$

son las proyecciones en V_1 y V_2.

Dem. Sean $Q_1, Q_2 \in K[t]$ tales que $Q_1(t)P_1(t) + P_2(t)Q_2(t) = 1$, luego

$$Q_1(f) \circ P_1(f) + P_2(f) \circ Q_2(f) = \mathrm{id}_V$$

en particular, dado $v \in V$

$$\begin{aligned}
v &= \underbrace{Q_1(f) \circ P_1(f)(v)}_{} + \underbrace{P_2(f) \circ Q_2(f)(v)}_{}\\
&= \qquad v_2 \qquad + \qquad v_1.
\end{aligned}$$

Ahora

$$P_2(f)(v_2) = P_2(f) \circ Q_1(f) \circ P_1(f)(v_2) = Q_1(f) \circ P_1(f) \circ P_2(f)(v_2) = Q_1(f) \circ P(f)(v_2) = 0$$

y

$$P_1(f)(v_1) = P_1(f) \circ Q_2(f) \circ P_2(f)(v_1) = Q_2(f) \circ P_1(f) \circ P_2(f)(v_1) = Q_2(f) \circ P(f)(v_1) = 0$$

luego $v_2 \in V_2$ y $v_1 \in V_1$. Así $V = V_1 + V_2$. Ahora si asumimos que $v \in V_1 \cap V_2$, $P_1(f)(v) = 0 = P_2(f)(v)$, entonces $v_1 = 0 = v_2$, luego $v = 0$.
Por la propiedad anterior V_1 y V_2 son invariantes bajo f. Finalmente si $\Pi_1(t) = Q_2(t)P_2(t)$ y $\Pi_2(t) = Q_1(t)P_1(t)$, tenemos

$$\Pi_2(t) + \Pi_1(t) = 1,$$

y

$$\Pi_2(f) + \Pi_1(f) = \mathrm{id}_V .$$

Ahora,

$$\Pi_1(t)\Pi_2(t) = Q_2(t)P_2(t)Q_1(t)P_1(t) = Q_2(t)Q_1(t)P(t)$$

luego

$$\Pi_1(f) \circ \Pi_2(f) = 0,$$

y, como

$$\Pi_2(t) = \Pi_2(t)\left(\Pi_2(t) + \Pi_1(t)\right) = \left(\Pi_2(t)\right)^2 + \Pi_2(t)\Pi_1(t)$$

entonces

$$\Pi_2(f) = \left(\Pi_2(f)\right)^2 .$$

Similarmente obtenemos

$$\Pi_1(f) = \left(\Pi_1(f)\right)^2 .$$

Luego, si $\Pi_1(f) = p_1$ y $\Pi_2(f) = p_2$, por Teorema 1.82, p_1 y p_2 son proyecciones sobre V_1 y V_2 respectivamente. □

Ejemplo 2.21. Sea $p \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ una proyección, es decir $p^2 = p$. Si $P(t) = t^2 - t$ entonces $P(p) = p^2 - p = 0$ y $P(t) = t(t-1) = P_1(t)P_2(t)$ donde $P_1(t) = t - 1$ y $P_2(t) = t$. Note que $(P_1(t), P_2(t)) = 1$ y

$$-P_1(t) + P_2(t) = 1.$$

Así, por la demostración de la propiedad anterior obtenemos que si

$$\begin{aligned} V_1 &= \ker\left(P_1(p)\right) = \ker\left(p - \mathrm{id}_V\right) \\ V_2 &= \ker\left(P_2(p)\right) = \ker\left(p\right) \end{aligned}$$

entonces $V = V_1 \oplus V_2$ y si

$$\begin{aligned} \Pi_1(t) &= P_2(t) = t \\ \Pi_2(t) &= -P_1(t) = 1 - t \end{aligned}$$

entonces $p_1 = \Pi_2(p) = p$ y $p_2 = \Pi_1(p) = \mathrm{id}_V - p$ son proyecciones respectivamente sobre V_1 y V_2 tales que $p_1 + p_2 = \mathrm{id}_V$.

Ejemplo 2.22. Suponga que $\mathrm{char}(K) \neq 2$, de forma que $-1 \neq 1$. Sea $f \in \mathrm{Hom}_K\left(K^2, K^2\right)$ el operador definido por

$$f(x,y) = (y,x).$$

Si $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$ es la base canónica entonces

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y $P_f(t) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$. Por el teorema del Caley-Hamilton $P_f(f) = 0$, entonces si $P_1(t) = t-1$ y $P_2(t) = t+1$, por la propiedad anterior, $K^2 = V_1 \oplus V_2$ donde $V_1 = \ker(f - \mathrm{id}_{K^2})$ y $V_2 = \ker(f + \mathrm{id}_{K^2})$. Como

$$-\frac{1}{2}P_1(t) + \frac{1}{2}P_2(t) = 1$$

entonces

$$p_1 = \frac{1}{2}\left(f + \mathrm{id}_{K^2}\right) \quad \text{y} \quad p_2 = -\frac{1}{2}\left(f - \mathrm{id}_{K^2}\right)$$

son las proyecciones sobre V_1 y V_2. Explícitamente

$$p_1(x,y) = \frac{1}{2}(x+y, x+y) \quad \text{y} \quad p_2(x,y) = \frac{1}{2}(x-y, y-x).$$

Observación 2.23. Note que bajo las condiciones de la propiedad anterior, si denotamos por $f_i \in \mathrm{Hom}_K(V_i, V_i)$, para $i = 1, 2$ la restricción de f a V_i, es decir $f_i(v_i) = f(v_i) \in V_i$ para todo $v_i \in V_i$, tenemos que $P_i(f_i) = 0$, pues $V_i = \ker(P_i(f))$ así que $P_i(f_i)(v_i) = P_i(f)(v_i) = 0$. Así, inductivamente, podemos aplicar la propiedad a cualquier descomposición de $P_i(t)$ en factores primos relativos para obtener el siguiente resultado.

Propiedad 2.24. *Sean $P(t) \in K[t]$ y $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$ tales que $P(f) = 0$. Si $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_n(t) \in K[t]$ son tales que $P(t) = P_1(t)P_2(t)\ldots P_n(t)$ y $(P_i(t), P_j(t)) = 1$ siempre que $i \neq j$, entonces*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$$

donde $V_i = \ker(P_i(f))$, $i = 1, \ldots, n$. Más aún cada V_i es invariante bajo f y existen polinomios $\Pi_1(t), \ldots, \Pi_n(t) \in K[t]$, tales que

$$\Pi_1(f) = p_1 \qquad , \ldots , \qquad \Pi_n(f) = p_n$$

son las proyecciones sobre $V_1, \ldots, V_n$.

Dem. Falta mostrar la existencia de $\Pi_1(t), \ldots, \Pi_n(t) \in K[t]$. De hecho, para $i = 1, \ldots, n$ sea

$$R_i(t) = \prod_{j \neq i} P_j(t),$$

Entonces $(R_1(t), \ldots, R_n(t)) = 1$. Tome $Q_1(t), \ldots, Q_n(t) \in K[t]$ tales que

$$Q_1(t)R_1(t) + \ldots Q_n(t)R_n(t) = 1.$$

De forma que, si $\Pi_i(t) = Q_i(t)R_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces, similarmente a la demostración anterior obtenemos

$$\Pi_1(f) + \ldots + \Pi_n(f) = \mathrm{id}_V,$$

$\Pi_i(f) \circ \Pi_j(f) = 0$, si $i \neq j$, y $(\Pi_i(f))^2 = \Pi_i(f)$. El resultado se sigue de Teorema 1.82. $\square$

Ejemplo 2.25. Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ el operador definido por

$$f(x, y, z, w) = (x - y + w, -x - z + 2w, 2x - y - z - w, 2x - y)$$

Si $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{Q}^4$ entonces:

$$\left[f\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y $P_f(t) = P_1(t)P_2(t)P_3(t)$ donde $P_1(t) = (t+1)$, $P_2(t) = (t-1)$, $P_3(t) = (t^2-2)$. Luego, por la propiedad anterior y el teorema de Caley-Hamilton, si para $i = 1, 2, 3$ definimos $V_i = \ker(P_i(f))$, cada uno de estos espacios es invariante bajo f y tenemos la descomposición:

$$\mathbb{Q}^4 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3.$$

Si usamos la misma notación de la demostración anterior, tenemos $R_1(t) = P_2(t)P3(t) = (t-1)(t^2-2)$, $R_2(t) = P_1(t)P_3(t) = (t+1)(t^2-2)$, $R_3 = (t-1)(t+1)$, y como

$$\frac{1}{2}R_1(t) - \frac{1}{2}R_2(t) + R_3(t) = 1,$$

si

$$\begin{aligned} \Pi_1(t) &= \frac{1}{2}R_1(t) = \frac{(t-1)(t^2-2)}{2}, \\ \Pi_2(t) &= -\frac{1}{2}R_2(t) = -\frac{(t+1)(t^2-2)}{2}, \text{ y} \\ \Pi_3(t) &= R_3(t) = (t-1)(t+1), \end{aligned}$$

entonces $p_i = \Pi_i(f)$, para $i = 1, 2, 3$, definen las respectivas proyecciones sobre V_i de acuerdo a nuestra descomposición de $\mathbb{Q}^4$. Las representaciones matriciales en la base canónica de estas proyecciones son:

$$\left[p_1\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[p_2\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[p_3\right]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

así pues $V_1 = \operatorname{im}(p_1) = \langle (1,2,1,0) \rangle$, $V_2 = \operatorname{im}(p_2) = \langle (1,1,0,1) \rangle$ y $V_3 = \operatorname{im}(p_3) = \langle (1,1,1,1), (1,0,-1,1) \rangle$. Sea $\mathcal{B} = \{(1,2,1,0), (1,1,0,1), (1,1,1,1), (1,0,-1,1)\}$, de forma que la representación matricial de f en esta base

$$\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

es una matriz diagonal por bloques, donde cada bloque describe la restricción de f a cada uno de los subespacios invariantes en la descomposición.

2.3. Operadores nilpotentes, espacios cíclicos y forma de Jordan

Sea $f \in \operatorname{Hom}_K(V, V)$ un operador.

Observación 2.26. Note que si V tiene dimensión finita y tomamos $f \in \operatorname{Hom}_K(V, V)$, $P_f(f) = 0$. Ahora suponga que $P_f(t)$ se descompone en factores lineales

$$P_f(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \ldots (t - \lambda_n)^{m_n}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K.$$

con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. De esta forma, si $V_i = \ker\left((f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}\right)$, para $i = 1, \ldots, n$,

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$$

y si además denotamos $g_i \in \operatorname{Hom}_K(V_i, V_i)$ a la restricción de $f - \lambda_i \operatorname{id}_V$ a V_i, tenemos $g_i^{m_i} = 0$. Este tipo de operadores, cuya potencia se anula, motivan la siguiente definición.

Definición 2.27. Decimos que f es nilpotente si existe $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $f^r = 0$, y al mínimo entre estos lo llamamos el grado de f.

Propiedad 2.28. *Suponga que f es nilpotente de grado r, y $V \neq \{0\}$, entonces tenemos una cadena de contenencias estrictas*

$$\{0\} < \ker(f) < \ker(f^2) < \ldots < \ker(f^r) = V.$$

En particular si V tiene dimensión finita, $r \leq \dim(V)$.

Dem. Note primero que para todo $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, si $v \in V$ es tal que $f^i(v) = 0$, entonces $f^{i+1}(v) = 0$, luego $\ker(f^i) \leq \ker(f^{i+1})$.
Si $r = 1$, no hay nada que demostrar pues $f = 0$ y así la cadena corresponde a $\{0\} < V$. Ahora suponga que $r > 1$, luego $f^{r-1} \neq 0$ y así existe $v \in V$ tal que $f^{r-1}(v) \neq 0$. Note que para $i = 1, \ldots, r-1$

$$\begin{aligned} f^{i-1}\left(f^{r-i}(v)\right) &= f^{r-1}(v) \neq 0, \text{ y} \\ f^{i}\left(f^{r-i}(v)\right) &= f^{r}(v) = 0 \end{aligned}$$

así $f^{r-i}(v) \in \ker(f^i) \setminus \ker(f^{i-1})$ y tenemos una contenencia estricta $\ker(f^{i-1}) < \ker(f^i)$.
Suponga ahora que V tiene dimensión finita y denote, para $i = 1, \ldots, r$, $n_i = \dim(\ker(f^i))$. Entonces

$$0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_r = \dim(V)$$

es una cadena de $r+1$ enteros estrictamente creciente que arranca en 0, luego $1 \leq n_1$, $2 \leq n_2$, ..., $r \leq n_r = \dim(V)$. □

Ejemplo 2.29. Sea $f \in \mathrm{Hom}_K(K^4, K^4)$ definido por

$$f(x, y, z, w) = (y, z, w, 0).$$

Así

$$\begin{aligned} f^2(x, y, z, w) &= (z, w, 0, 0), \\ f^3(x, y, z, w) &= (w, 0, 0, 0), \\ f^4(x, y, z, w) &= (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

y si $n_i = \dim(\ker(f^i))$ entonces

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 3, \quad n_4 = 4.$$

La representación matricial de f en la base canónica $\mathcal{C}$ es

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y el polinomio característico es $P_f(t) = t^4$.

Ejemplo 2.30. Sea $f \in \mathrm{Hom}_K(K^4, K^4)$ definido por

$$f(x, y, z, w) = (y, z, 0, 0).$$

Así

$$\begin{aligned} f^2(x, y, z, w) &= (z, 0, 0, 0), \\ f^3(x, y, z, w) &= (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

y si $n_i = \dim(\ker(f^i))$ entonces

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 3, \quad n_3 = 4.$$

La representación matricial de f en la base canónica $\mathcal{C}$ es

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

y el polinomio característico es $P_f(t) = t^4$.

Ejemplo 2.31. Sea $f \in \mathrm{Hom}_K(K^4, K^4)$ definido por

$$f(x, y, z, w) = (y, 0, w, 0).$$

Así

$$f^2(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$$

y si $n_i = \dim(\ker(f^i))$ entonces

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 4$$

La representación matricial de f en la base canónica $\mathcal{C}$ es

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

y el polinomio característico es $P_f(t) = t^4$.

Ejemplo 2.32. Sea $f \in \mathrm{Hom}_K(K^4, K^4)$ definido por

$$f(x, y, z, w) = (y, 0, 0, 0).$$

Así

$$f^2(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$$

y si $n_i = \dim(\ker(f^i))$ entonces

$$n_1 = 3, \quad n_2 = 4$$

La representación matricial de f en la base canónica $\mathcal{C}$ es

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

y el polinomio característico es $P_f(t) = t^4$.

Definición 2.33. Sea $v \in V$, si existe $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $f^k(v) = 0$, al mínimo entre estos los llamamos el orden de v bajo f y lo denotamos por $\mathrm{ord}_f(v)$.

Propiedad 2.34. *Sea $v \in V$, $v \neq 0$, y suponga que $k = \mathrm{ord}_f(v)$, entonces $S = \{v, f(v), \ldots, f^{k-1}(v)\}$ es linealmente independiente.*

Dem. Suponga que $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in K$ son tales que

$$a_0 v + a_1 f(v) + \ldots + a_{k-1} f^{k-1}(v) = 0.$$

Aplicando f^{k-1} a esta igualdad obtenemos $a_0 f^{k-1}(v) = 0$, pero $f^{k-1}(v) \neq 0$ luego $a_0 = 0$. Inductivamente, si hemos establecido que $a_0 = a_1 = \ldots = a_{i-1} = 0$ para $0 < i < k-1$, aplicando f^{k-i-1} a la misma igualdad, obtenemos $a_i f^{k-1}(v) = 0$, luego $a_i = 0$. Así $a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0$. □

Observación 2.35. Suponga que V tiene dimensión finita y f es nilpotente de grado $r = \dim(V)$. Si $v \in V$ es tal que $v \notin \ker(f^{r-1})$ entonces $\mathrm{ord}_f(v) = r$, luego si $v_i = f^{r-i}(v)$ para $i = 1, \ldots, r$, por la propiedad anterior

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_r\} = \{f^{r-1}(v), \ldots, f(v), v\}$$

es una base de V; más aún

$$\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Definición 2.36. Decimos que V es cíclico bajo f si

$$S = \left\{f^i(v)\right\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$$

genera a V, es decir $\langle S \rangle = V$, para algún $v \in V$. En tal caso decimos que v es un *vector cíclico* relativo a f.

Observación 2.37. Si V tiene dimensión finita y $f \neq 0$ es nilpotente de grado $r = \dim(V)$, la observación anterior explica que V es cíclico bajo f.

Definición 2.38. Suponga que V tiene dimensión finita y $f \neq 0$ es nilpotente de grado $r = \dim(V)$, una base de la forma

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_r\}, \qquad v_i = f^{r-i}(v_r)$$

se llama una *base de Jordan de V relativa a f*.

Observación 2.39. En caso de que f sea nilpotente de grado inferior, V no es cíclico, pero se puede descomponer en subespacios invariantes bajo f y cíclicos bajo la restricción de f a ellos. Esto es el contenido del siguiente teorema.

Teorema 2.40. *Suponga que V tiene dimensión finita y que $f \neq 0$ es nilpotente de grado r. Sea $n = \dim(\ker(f))$. Entonces existen n subespacios invariantes bajo f, $V_1, \ldots, V_n$ tales que*

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$$

y si $f_i \in \mathrm{Hom}_K(V_i, V_i)$ es la restricción de f a V_i, para $i = 1, \ldots, n$, entonces V_i cíclico bajo f_i.

Dem. Denotemos $K_i = \ker(f^i)$, de forma que $K_0 = \{0\}$ y $K_r = V$. Note que para $i = 1, \ldots, r-1$, $K_i < K_{i+1}$. Podemos así descomponer para cada $i = 2, \ldots r$

$$K_i = K_{i-1} \oplus K_i'.$$

De forma que si $v \in K_i'$, $v \neq 0$, entonces $\mathrm{ord}_f(v) = i$. Por lo tanto

$$f(K_i') \leq K_{i-1}'.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} V &= K_r \\ &= K_{r-1} \oplus K_r' \\ &\vdots \\ &= K_1 \oplus K_2' \oplus \ldots \oplus K_r' \end{aligned}$$

y

$$K_r' \xrightarrow{f} K_{r-1}' \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{f} K_2' \xrightarrow{f} K_1 \xrightarrow{f} \{0\}$$

Se trata entonces de escoger una base de V que sea compatible con esta descomposición y esta cadena de imágenes bajo f. Denote $n_i = \dim(K_i)$ y $n_i' = \dim(K_i')$, para $i = 2, \ldots, r$, y $n_1 = n = \dim(K_1)$ de forma que

$$n_i = n_i' + n_{i-1}$$

y

$$\begin{aligned} \dim(V) &= n_r \\ &= n_r' + n_{r-1} \\ &\vdots \\ &= n_r' + n_{r-1}' + \ldots + n_2 \\ &= n_r' + n_{r-1}' + \ldots + n_2' + n_1 \\ &= n_r' + n_{r-1}' + \ldots + n_2' + n \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{B}_r = \{v_{r,1}, \ldots, v_{r,n_r'}\} \subseteq V$ una base de K_r'. Para $i = 1, \ldots n_r'$, sea

$$v_{r-1,i} = f(v_{r,i}).$$

Note que $f(\mathcal{B}_r) = \{v_{r-1,1}, \ldots, v_{r-1,n'_r}\} \subseteq K'_{r-1}$ es linealmente independiente. De hecho si

$$a_1 v_{r-1,1} + \ldots + a_{n'_r} v_{r-1,n'_r} = 0,$$

entonces

$$a_1 f(v_{r,1}) + \ldots + a_{n'_r} f(v_{r,n'_r}) = 0$$

luego $a_1 v_{r,1} + \ldots + a_{n'_r} v_{r,n'_r} \in K_1 \cap K'_r$; por lo tanto $a_1 v_{r,1} + \ldots + a_{n'_r} v_{r,n'_r} = 0$ y $a_1 = \ldots = a_{n'_r} = 0$.
Sea $\mathcal{B}_{r-1} = \{v_{r-1,1}, \ldots, v_{r-1,n'_{r-1}}\}$ un base de K'_{r-1} que contiene a $f(\mathcal{B}_r)$. Para $i = 1, \ldots n'_{r-1}$, sea

$$v_{r-2,i} = f(v_{r-1,i}).$$

Similarmente, note que $f(\mathcal{B}_{r-1}) = \{v_{r-2,1}, \ldots, v_{r-2,n'_{r-1}}\} \subseteq K'_{r-2}$ es linealmente independiente.
Iterativamente obtenemos bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_r$ respectivamente de $K_1, K'_2, \ldots, K'_r$ con $f(\mathcal{B}_{i+1}) \subseteq \mathcal{B}_i$ para $i = 1, \ldots, r-1$. En particular

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_r$$

es una base de V. Defina (ver Figura 2.1)

$$\begin{aligned} V_1 &= \langle v_{j,1} \in \mathcal{B} \mid 1 \leq \dim(K'_j) \rangle \\ V_2 &= \langle v_{j,2} \in \mathcal{B} \mid 2 \leq \dim(K'_j) \rangle \\ &\vdots \\ V_n &= \langle v_{j,n} \in \mathcal{B} \mid n \leq \dim(K'_j) \rangle \end{aligned}$$

de esta forma por construcción cada V_i, $i = 1, \ldots, n$, son invariantes bajo f y cíclicos bajo f_i. $\square$

Ejemplo 2.41. Si $f \in \mathrm{Hom}_K(K^4, K^4)$ está definido como en Ejemplo 2.29

$$f(x, y, z, w) = (y, z, w, 0),$$

entonces

$$n = 1, \quad n'_2 = 1, \quad n'_3 = 1, \quad n'_4 = 1.$$

Ejemplo 2.42. Si $f \in \mathrm{Hom}_K(K^4, K^4)$ está definido como en Ejemplo 2.30

$$f(x, y, z, w) = (y, z, 0, 0),$$

entonces

$$n = 2, \quad n'_2 = 1, \quad n'_3 = 1.$$

Ejemplo 2.43. Si $f \in \mathrm{Hom}_K(K^4, K^4)$ está definido como en Ejemplo 2.31

$$f(x, y, z, w) = (y, 0, w, 0),$$

entonces

$$n = 2, \quad n'_2 = 2.$$

Ejemplo 2.44. Si $f \in \mathrm{Hom}_K(K^4, K^4)$ está definido como en Ejemplo 2.32

$$f(x,y,z,w) = (y,0,0,0),$$

entonces

$$n = 3, \quad n'_2 = 1.$$

Observación 2.45. Bajo la hipótesis del teorema, y usando la notación en él, obtenemos que para cada V_i, $i = 1, \ldots, n$, tenemos una base de Jordan $\mathcal{B}_i$ relativa a f_i. De esta forma la unión de ella forma una base $\mathcal{B}$ de V. La representación matricial de f en la base T es una matriz diagonal por bloques:

$$\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & J_n \end{array}\right]$$

donde cada $J_i = \Big[f\Big]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}$ es una matriz $\dim(V_i) \times \dim(V_i)$ de la forma en Observación 2.35.

Observación 2.46. Como corolario de la prueba del teorema tenemos que cuando V tiene dimensión finita y f es nilpotente, la información suministrada por las cantidades

$$\begin{array}{rcl} \dim(K_1) & = & n \\ \dim(K_i) - \dim(K_{i-1}) & = & n'_i, \qquad i = 2, \ldots, r \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
K'_r & v_{r,1} & v_{r,2} & \cdots & v_{r,n'_r} & & & & & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & & & & & \\
K'_{r-1} & v_{r-1,1} & v_{r-1,2} & \cdots & v_{r-1,n'_r} & \cdots & v_{r-1,n'_{r-1}} & & & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & & & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & \\
K'_2 & v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,n'_r} & \cdots & v_{2,n'_{r-1}} & \cdots & v_{2,n'_2} & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
K_1 & v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,n'_r} & \cdots & v_{1,n'_{r-1}} & \cdots & v_{1,n'_2} & \cdots & v_{1,n} & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\{0\} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \\
 & & & & & & & & & & & \\
 & V_1 & V_2 & \cdots & V_{n'_r} & \cdots & V_{n'_{r-1}} & \cdots & V_{n'_2} & \cdots & V_n &
\end{array}$$

Figura 2.1: Edificios colapsando

son tales que $n \geq n'_2 \geq \ldots \geq n'_r$ y determinan univocamente la transformación f, salvo cambio de coordenadas. De hecho dadas dos transformaciones con igual información, para cada una podemos encontrar una base de V que arrojan la misma representación matricial. Específicamente, n indica el número de bloques de Jordan y n'_i el número de bloques de Jordan de tamaño mayor o igual a i.

Definición 2.47. Se le llama *matriz en bloque de Jordan* a una matriz cuadrada $n \times n$ de la forma

$$J_{\lambda,n} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Lema 2.48. *Suponga que V tiene dimensión finita y que $P(t) = (t-\lambda)^m \in K[t]$, es tal que $P(f) = 0$. Entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que la representación matricial de f en esta base es es una matriz diagonal por bloques:*

$$\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & J_n \end{array}\right]$$

donde cada J_i, $i = 1, \ldots, n$ es una matriz en bloque de Jordan.

Dem. Tenemos $P(f) = (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^m = 0$. Luego el operador $g = f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ es nilpotente. Por Teorema 2.40,

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$$

donde para cada V_i, $i = 1, \ldots, n$, hay una base de la forma $\mathcal{B}_i = \{v_{1,i}, \ldots, v_{m_i,i}\}$, con $\dim(V_i) = m_i$ y

$$\begin{array}{rcccl} v_{m_i-1,i} & = & g(v_{m_i,i}) & = & f(v_{m_i,i}) - \lambda v_{m_i,i} \\ v_{m_i-2,i} & = & g(v_{m_i-1,i}) & = & f(v_{m_i-1,i}) - \lambda v_{m_i-1,i} \\ & \vdots & & \vdots & \\ v_{1,i} & = & g(v_{2,i}) & = & f(v_{2,i}) - \lambda v_{2,i} \\ 0 & = & g(v_{1,i}) & = & f(v_{1,i}) - \lambda v_{1,i}. \end{array}$$

Así,

$$\begin{array}{rcl} f(v_{m_i,i}) & = & v_{m_i-1,i} + \lambda v_{m_i,i} \\ f(v_{m_i-1,i}) & = & v_{m_i-2,i} + \lambda v_{m_i-1,i} \\ & \vdots & \\ f(v_{2,i}) & = & v_{1,i} + \lambda v_{2,i} \\ f(v_{1,i}) & = & \lambda v_{1,i}. \end{array}$$

En particular, cada V_i es invariante bajo f, luego, si $f_i \in \mathrm{Hom}_K(V_i, V_i)$ denota la restricción de f a V_i, $\Big[f_i\Big]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i} = J_i$ es una matriz en bloque de Jordan. De esto, si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_n$, la representación matricial $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ tiene la forma buscada. $\square$

Teorema 2.49 (Teorema de Jordan)**.** *Suponga que V tiene dimensión finita y que*

$$P_f(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\ldots(t-\lambda_r)^{m_r}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in K.$$

Entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que la representación matricial de f en esta base es es una matriz diagonal por bloques de Jordan.

Dem. Sin perdida de generalidad podemos asumir que $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Así

$$((t-\lambda_i)^{m_i}, (t-\lambda_j)^{m_j}) = 1$$

si $i \neq j$. Por el teorema de Caley-Hamilton $P_f(f) = 0$, luego por Propiedad 2.24,

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$$

donde cada $V_i = \ker((f - \lambda_i \,\mathrm{id}_V)^{m_i})$, $i = 1, \ldots, r$, es invariante bajo f. En particular, si $f_i \in \mathrm{Hom}_K(V_i, V_i)$ es la restricción de f a V_i, $i = 1, \ldots, r$, $P_i(f_i) = 0$, donde $P_i(t) = (t-\lambda_i)^{m_i}$. Por lo tanto, el lema implica que existe una base $\mathcal{B}_i$ de V_i para la cual $\Big[f_i\Big]_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}$ es una matriz diagonal por bloques de Jordan. Finalmente si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_n$, la representación matricial $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ tiene la forma afirmada. $\square$

Definición 2.50. Generalizamos la definición anterior de base de Jordan. Si V tiene dimensión finita, decimos que una base de V es una *base de Jordan relativa a f* si la representación matricial de este operador en aquella base es diagonal en bloques de Jordan.

Lema 2.51. *Sea $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ son valores propios, todos distintos, de f, y, para $i = 1, \ldots, n$, $v_i \in V$ es un vector propio de λ_i, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente.*

Dem. Por inducción en n, siendo el caso base $n = 1$ inmediato, pues $\{v_1\}$ es linealmente independiente si $v_1 \neq 0$, la cual se cumple pues v_1 es vector propio. Para el paso inductivo, si $a_1, \ldots, a_n$ son tales que $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = 0$,por contradicción podemos asumir que cada $a_i \neq 0$, o de lo contrario, por hipotesis de inducción, si algún a_i es 0 el resto también lo son. Entonces

$$0 = (f - \lambda_n \,\mathrm{id}_V)(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) = a_1(\lambda_1 - \lambda_n)v_1 + \ldots + a_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)v_{n-1};$$

y así, por hipótesis de inducción, para $i = 1, \ldots, n-1$, $a_i(\lambda_i - \lambda_n) = 0$. Pero $a_i \neq 0$ y $\lambda_i - \lambda_n \neq 0$, si $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, lo cual es una contradicción. $\square$

Lema 2.52. *Suponga que $f \in \operatorname{Hom}_K(V,V)$ es diagonalizable, entonces:*

1. *Si $V_0 \neq \{0\}$ es invariante bajo f, su restricción a V_0, $f_0 \in \operatorname{Hom}_K(V_0,V_0)$, también es diagonalizable.*

2. *Si $g \in \operatorname{Hom}_K(V,V)$ es diagonalizable y $f \circ g = g \circ f$, entonces existe una familia $\{V_i\}_{i\in I}$ de espacios propios simultáneamente de f y g tal que $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$. En particular si v es un vector propio simultáneamente de f y g, v es un vector propio de $af + bg$ para todo $a, b \in K$.*

Dem.

1. Dado un valor propio $\lambda \in K$ de f, definimos $E_\lambda \leq V$ como el subespacio generado por los vectores propios de f asociados a λ, es decir $E_\lambda = \ker(f - \lambda \operatorname{id}_V)$, y $F_\lambda = V_0 \cap E_\lambda$. Note que, como f es diagonalizable, por el lema anterior,
$$V = \bigoplus_{i\in I} E_{\lambda_i}$$
donde $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ es la colección de valores propios de f. Sea $v \in V_0$, $v \neq 0$, y
$$v = v_1 + \ldots + v_n$$
una descomposición en vectores propios asociados respectivamente a valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Por inducción en n veamos que $v_1, \ldots, v_n \in V_0$ siendo el caso base $n = 1$ inmediato pues en tal caso $v_0 = v_1$. Para el paso inductivo, como V_0 es invariante bajo f
$$(f - \lambda_n \operatorname{id}_V)(v) = (\lambda_1 - \lambda_n)v_1 + \ldots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)v_{n-1}$$
también pertenece a V_0. Luego por hipótesis inductiva , $(\lambda_1 - \lambda_n)v_1, \ldots, (\lambda_{n-1} - \lambda_n)v_{n-1} \in V_0$, así pues $v_1, \ldots, v_{n-1} \in V_0$ y $v_n = v - v_1 - \ldots - v_{n-1} \in V_0$. De donde
$$V_0 = \bigoplus_{i\in J} F_{\lambda_i},$$
donde J es la colección de $i \in I$ tales que $F_{\lambda_i} \neq \{0\}$. Entonces f_0 es diagonalizable tomando bases de cada F_{λ_i}, $i \in J$.

2. Usando la notación de la demostración de la primera afirmación del lema, si $v \in E_{\lambda_i}$, $i \in I$,
$$f\left(g(v)\right) = g\left(f(v)\right) = \lambda_i g(v),$$
luego E_{λ_i} es invariante bajo g. Por la primera parte del lema, la restricción de g a E_{λ_i}, $g_i \in \operatorname{Hom}_K(E_{\lambda_i}, E_{\lambda_i})$ es diagonalizable. Luego g es diagonalizable tomando bases de cada E_{λ_i}, $i \in I$. Los espacios propios generados por cada uno de estos elementos de estas bases forman una colección de espacios propios simultáneos cuya suma es una suma directa igual a V. $\square$

Teorema 2.53 (Descomposición de Jordan-Chevalley)**.** *Suponga que V tiene dimensión finita y que*

$$P_f(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\dots(t-\lambda_r)^{m_r}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in K.$$

donde $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Entonces existen operadores $f_N, f_D \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$, tales que

1. *f_D es diagonalizable y f_N es nilpotente;*
2. *$f_D + f_N = f$; y,*
3. *$f_D \circ f_N = f_N \circ f_D$.*

Más aún, esta descomposición es única respecto a estas tres propiedades. Además existen polinomios $P_D(t), P_N(t) \in K[t]$ tales que $f_N = P_N(f)$ y $f_D = P_D(f)$.

Dem. Defina $P_i(t) = (t-\lambda_i)^{m_i}$, $i = 1, \dots, n$. Por Propiedad 2.24, existen $\Pi_1(t), \dots, \Pi_n(t) \in K[t]$ tales que $\Pi_i(f) = p_i$, $i = 1, \dots, n$, son las proyecciones sobre $V_i = \ker\left((f-\lambda_i \,\mathrm{id}_V)^{m_i}\right)$ respecto a la descomposición

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r.$$

Defina $P_D(t) = \lambda_1\Pi_1(t) + \dots + \lambda_n\Pi_n(t)$, y $f_D = P_D(f)$. De esta forma, si $v_i \in V_i$,

$$f_D(v_i) = \lambda_1 p_1(v_i) + \dots + \lambda_n p_n(v_i) = \lambda_i v_i,$$

y así f_D es diagonalizable por Teorema 2.9. Defina $P_N(t) = t - P_D(t)$ y $f_N = P_N(f) = f - f_D$. De esta forma, $f_D + f_N = f$, y si $v_i \in V_i$

$$f_N(v_i) = f(v_i) - f_D(v_i) = f(v_i) - \lambda_i(v_i) = (f - \lambda_i \,\mathrm{id}_V)(v_i),$$

luego la restricción de f_N a V_i es nilpotente de grado $\leq m_i$. De donde f_N es nilpotente de grado $\leq \max\{m_1, \dots, m_n\}$. Finalmente,

$$f_D \circ f_N = P_D(f) \circ P_N(f) = P_N(f) \circ P_D(f) = f_N \circ f_D.$$

Si $f'_D, f'_N \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$ conmutan y son respectivamente diagonalizable y nilpotente tales que $f = f'_D + f'_N$, entonces

$$f \circ f'_D = (f'_D + f'_N)f'_D = f'_D \circ f'_D + f'_N \circ f'_D = f'_D \circ f'_D + f'_D \circ f'_N = f'_D \circ f,$$

es decir f y f'_D conmutan. Por lo cual, $P_D(f) = f_D$ y f'_D también lo hacen. Entonces f_D y f'_D son diagonalizables y conmutan. Ahora, si v es un vector propio común, entonces v es un vector propio de $f_D - f'_D$. Pero $f_D - f'_D = f'_N - f_N$, y, como f'_N y f_N igualmente conmutan, $f'_N - f_N$ es igualmente nilpotente. Así $f_D - f'_D$ es diagonalizable y, a su vez, nilpotente, el valor propio asociado a v es 0. Por el lema anterior existe una base de V de vectores propios simultáneos de f_D y f'_D, luego todos los valores propios de $f_D - f'_D$ son 0. Es decir $f_D - f'_D = 0 = f'_N - f_N$; y, $f'_D = f_D$ y $f'_N = f_N$. □

2.4. Polinomio minimal y transformaciones semi-simples

Capítulo 3

Espacio dual

Sea K un cuerpo y V, W espacios vectoriales sobre K.

Notación 3.1. Dada una colección de indices I, definimos para cada $i, j \in I$ el símbolo *delta de Kronecker*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

3.1. Funcionales lineales

Definición 3.2. El *espacio dual de* V es el espacio vectorial $V^* = \operatorname{Hom}_K(V, K)$, es decir la colección de transformaciones lineales

$$\lambda : V \longrightarrow K.$$

A los elementos $\lambda \in V^*$ los llamamos *funcionales lineales*.

Proposición 3.3. *Si V tiene dimensión finita* $\dim(V) = \dim(V^*)$.

Dem. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V, donde $n = \dim(V)$. Por Proposición 1.40.2, $\lambda \in V^*$ está unívocamente por los valores $\lambda(v_1), \dots, \lambda(v_n)$. Defina $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in V*$ por

$$\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}.$$

Veamos que $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ es una base de V^* probando que es linealmente independiente y que genera a V^*; y así obtenemos $\dim(V^*) = n$. Para la independencia lineal, tome $a_1, \dots, a_n \in K$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i = 0.$$

De forma que, para $j = 1, \dots, n$,

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i \right) (v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i(v_j) = \sum_{i=1}^{j} a_i \delta_{ij} = a_j.$$

Para ver que $V^* = \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n \rangle$, dado $\lambda \in V^*$, defina $a_i = \lambda(v_i)$ y sea

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i.$$

De forma que, para $j = 1, \ldots, n$,

$$\mu(v_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i \right)(v_j) = \sum_{i=1}^{j} a_i \delta_{ij} = a_j = \lambda(v_j),$$

luego $\mu = \lambda$. □

Definición 3.4. Suponga que V tiene dimensión finita y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V, donde $n = \dim(V)$. A la base $\mathcal{B}^* = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ de V^* donde

$$\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}.$$

la llamamos *base dual* de $\mathcal{B}$.

Observación 3.5. Si V tiene dimensión finita, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V y $\mathcal{B}^* = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ es la base dual, entonces para todo $v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v) v_i.$$

De hecho si $a_1, \ldots, a_n \in K$ son tales que $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = v$,

$$\lambda_i(v) = \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j \right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{ij} = a_i.$$

Es decir, λ_i arroja la coordenada en v_i.

Observación 3.6. Si V tiene dimensión infinita y $\{v_i\}_{i \in I}$ es una base de V, igualmente podemos definir la colección $\{\lambda_i\}_{i \in I} \subseteq V^*$ por

$$\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}.$$

e igualmente tenemos que para todo $v \in V$

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i(v) v_i.$$

Note que $\lambda_i(v) = 0$ para todo $i \in I$ salvo para una subcolección finita de indices. La diferencia con el caso en dimensión infinita es que $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ no es una base de V^*, pues en tal caso el funcional lineal λ definido por $\lambda(v_i) = 1$, para todo $i \in I$, no es una combinación lineal de $\{\lambda_i\}_{i \in I}$.

Definición 3.7. Sean $S \subseteq V$ y $L \subseteq V^*$, definimos:

1. el *anulador* de S por
$$S^0 = \{\lambda \in V^* \mid \lambda(v) = 0, \forall v \in S\};$$
2. el *cero* de L por
$$L_0 = \{v \in V \mid \lambda(v) = 0, \forall \lambda \in L\}.$$

Propiedad 3.8. *Sean $S \subseteq V$ y $L \subseteq V^*$. Tenemos:*

1. $S^0 \leq V^*$ *y* $L_0 \leq V$*;*
2. *si $S_1, S_2 \subseteq V$ y $L_1, L_2 \subseteq V^*$ son tales que*
$$S_1 \subseteq S_2 \qquad y \qquad L_1 \subseteq L_2,$$
entonces
$$S_2^0 \leq S_1^0 \qquad y \qquad (L_2)_0 \leq (L_1)_0\,;$$
3. $\langle S^0 \rangle_0 = \mathrm{Sp}(S)$*;*
4. *si $V_1, V_2 \leq V$ y $V_1^*, V_2^* \leq V^*$, entonces*
$$(V_1 + V_2)^0 = V_1^0 \cap V_2^0, \;\; y \;\; (V_1^* + V_2^*)_0 = (V_1^*)_0 \cap (V_2^*)_0\,;$$
5. *si V tiene dimensión finita,*
$$\dim(\langle S \rangle) + \dim(S^0) = \dim(V), \;\; y \;\; \dim(L_0) + \dim(\langle L \rangle) = \dim(V^*).$$

Dem.

1. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in S^0$ y $c \in K$, entonces para todo $v \in S$
$$(\lambda_1 + \lambda_2)(v) = \lambda_1(v) + \lambda_2(v) = 0, \;\text{y}\; (c\lambda_1)(v) = c\lambda_1(v) = 0,$$
es decir $\lambda_1 + \lambda_2 \in S^0$ y $c\lambda_1 \in S^0$. Luego S_0 es un subespacio de V^*. Similarmente L_0 es un subespacio de V.
2. Sea $\lambda \in S_2^0$, luego, si $v \in S_1$, como $v \in S_2$, entonces $\lambda(v) = 0$; en particular $\lambda \in S_1^0$. Similarmente, sea $v \in (L_2)^0$, luego, si $\lambda \in L_1$, como $\lambda \in L_2$, entonces $\lambda(v) = 0$; en particular $v \in (L_1)^0$.
3. Sea $v \in \langle S \rangle$, entonces existen $v_1, \ldots, v_m \in S$ y $a_1, \ldots, a_m \in K$ tales que
$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$$
así, si $\lambda \in S^0$, $\lambda(v) = a_1\lambda(v_1) + \ldots + a_m\lambda(v_m) = 0$. Luego $\langle S \rangle \leq \left(S^0\right)_0$. Tome ahora un subconjunto $S' \subseteq S$ linealmente independiente tal que

$\langle S' \rangle = \langle S \rangle$, el cual extendemos a una base $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in I}$ de V. Defina, para cada $i \in I$, $\lambda_i \in V^*$ por

$$\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$$

para todo $j \in I$. De esta forma $\lambda_i \in S^0$ si y solo si $v_i \notin S'$. Sea $J \subset I$ la subcolección de indices definida por $j \in J$ si $v_j \in S'$. Entonces $L = \{\lambda_i\}_{i \in I \setminus J} \subseteq S^0$ y $\left(S^0\right)_0 \leq L_0$. Ahora si $v \in V$, como

$$v = \sum_{i \in J} \lambda_i(v) v_i + \sum_{i \in I \setminus J} \lambda_i(v) v_i$$

entonces $v \in L_0$ si y solo si $v \in \langle S' \rangle$, es decir $L_0 = \langle S' \rangle$. Luego $\left(S^0\right)_0 \leq \langle S' \rangle = \langle S \rangle$.

4. Suponga que $\lambda \in (V_1 + V_2)^0$, luego, si $v \in V_i$, con $i = 1$ ó $i = 2$, entonces $v \in V_1 + V_2$ y $\lambda(v) = 0$, en particular $\lambda \in V_1^0 \cap V_2^0$. Recíprocamente, si $\lambda \in V_1^0 \cap V_2^0$ y $v \in V_1 + V_2$, con $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$, $\lambda(v) = \lambda(v_1) + \lambda(v_2) = 0$, en particular $\lambda \in (V_1 + V_2)^0$.
   Similarmente, suponga que $v \in (V_1^* + V_2^*)_0$, luego, si $\lambda \in V_i^*$, con $i = 1$ ó $i = 2$, entonces $\lambda \in V_1^* + V_2^*$ y $\lambda(v) = 0$, en particular $v \in (V_1^*)_0 \cap (V_2^*)_0$. Recíprocamente, si $v \in (V_1^*)_0 \cap (V_2^*)_0$ y $\lambda \in V_1^* + V_2^*$, con $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_1 \in V_1$ y $\lambda_2 \in V_2$, $\lambda(v) = \lambda_1(v) + \lambda_2(v) = 0$, en particular $v \in (V_1^* + V_2^*)_0$.

5. Tome un subconjunto $\{v_1, \ldots, v_k\} = S' \subseteq S$ linealmente independiente tal que $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$, el cual extendemos a una base $\mathcal{B} = \{v_1 \ldots, v_n\}$ de V. Sea $\mathcal{B}^* = \{\lambda_1 \ldots, \lambda_n\}$ la base dual a $\mathcal{B}$. Defina $f \in \operatorname{Hom}_K(V, V)$ por

$$f(v) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(v) v_i.$$

   Por construcción, $\operatorname{im}(f) = \langle S' \rangle = \langle S \rangle$ y $\ker(f) = \langle \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n \rangle_0$. Pero $\langle \lambda_{k+1} \ldots \lambda_n \rangle = S^0$, luego $\dim\left(\langle S \rangle\right) + \dim(S^0) = n$.
   Similarmente, tome un subconjunto $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} = L' \subseteq L$ linealmente independiente tal que $\langle L' \rangle = \langle L \rangle$, el cual extendemos a una base $\mathcal{B}^* = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ de V. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Defina $f \in \operatorname{Hom}_K(V, V)$ por

$$f(v) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(v) v_i.$$

   Por construcción, $\ker(f) = L_0' = L_0$ y $\operatorname{im}(f) = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Luego $\dim \operatorname{im}(f) = \dim\left(\langle L \rangle\right)$ y $\dim(L_0) + \dim\left(\langle L \rangle\right) = n$. □

Proposición 3.9. *Sea* $V_1 \leq V$ *entonces* $(V/V_1)^* = V_1^0$.

Dem. Tome $\pi_{V_1} : V \to V/V_1$ con $\pi_{V_1}(v) = v + V_1$; y, defina la transformación lineal $f : (V/V_1)^* \to V^*$ por $f(\lambda) = \lambda \circ \pi_{V_1}$. Veamos que f es un isomorfismo. Primero es inyectiva pues si $\lambda \circ \pi_{V_1} = 0$, entonces, para todo $v + V_1 \in V/V_1$, $\lambda(v + V_1) = \lambda \circ \pi_{V_1}(v) = 0$. Es decir $\lambda = 0$. Por otro lado f es sobreyectiva, pues dado $\mu \in V_1^0$, si $v - v' \in V_1$ entonces $\mu(v) - \mu(v') = \mu(v - v') = 0$, luego la función $\lambda : V/V_1 \to K$ tal que $\lambda(v + V_1) = \mu(v)$ es un funcional lineal tal que $f(\lambda) = \mu$. $\square$

Teorema 3.10. *Existe una transformación lineal canónica inyectiva*

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\bullet} : V & \longrightarrow & (V^*)^* \\ v & \longmapsto & \widehat{v} : \lambda \mapsto \lambda(v). \end{array}$$

Si V tiene dimensión finita, $\widehat{\bullet}$ es un isomorfismo.

Dem. Por definición $\widehat{\bullet}$ es lineal, pues

$$\widehat{v_1 + v_2}(\lambda) = \lambda(v_1 + v_2) = \lambda(v_1) + \lambda(v_2) = (\widehat{v_1} + \widehat{v_2})(\lambda).$$

Ahora sea $\{v_i\}_{i\in I}$ una base de V, y $\{\lambda_i\}_{i\in I} \subseteq V^*$ la colección tal que $\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$. Como para todo $v \in V$, $v = \sum_{i\in I} \lambda_i(v) v_i$, si $\widehat{v} = 0$ entonces $\lambda_i(v) = 0$ para todo i y así $v = 0$. Luego $\widehat{\bullet}$ es inyectiva.
Si V tiene dimensión finita, $\dim(V) = \dim(V^*) = \dim\left((V^*)^*\right)$, entonces $\widehat{\bullet}$ es un isomorfismo. $\square$

3.2. Transformación dual

Definición 3.11. Sea $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Definimos la *transformación dual*, $f^* \in \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$, por

$$f^*(\lambda) = \lambda \circ f$$

para todo $\lambda \in W^*$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "f^*(\lambda)"'] & W \arrow[d, "\lambda"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Figura 3.1: Transformación dual

Observación 3.12. La linearidad del mapa f^* se sigue de las siguientes igualdades, validas para todo $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in W^*$, $c \in K$:

$$\begin{array}{rcl} (\lambda_1 + \lambda_2) \circ f & = & \lambda_1 \circ f + \lambda_2 \circ f \\ (c\lambda_1) \circ f & = & c(\lambda_1 \circ f) \end{array}$$

Propiedad 3.13. *Sean U un espacio vectorial sobre K y $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ y $g \in \mathrm{Hom}_K(W, U)$, entonces*

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

Dem. Para $\lambda \in U^*$, tenemos

$$(g \circ f)^* \lambda = \lambda \circ (g \circ f) = (\lambda \circ g) \circ f = g^*(\lambda) \circ f = f^* \circ g^*(\lambda)$$

□

Propiedad 3.14. *Sea $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, entonces*

1. *Si f es sobreyectiva, f^* es inyectiva; y,*
2. *Si f es inyectiva, f^* es sobreyectiva.*

Dem.

1. Sea $\lambda \in W^*$ tal que $f^*(\lambda) = 0$, entonces, dado $w \in W$, como f es sobreyectiva, existe $v \in V$ tal que $w = f(v)$, así
$$\lambda(w) = \lambda\left(f(v)\right) = f^*(\lambda)(v) = 0$$
luego $\lambda = 0$ y f^* es inyectiva.
2. Sea $W_1, W_2 \leq W$ tales que $W = W_1 \oplus W_2$ y $W_1 = f(V)$. Tome $\mu \in V$, y defina $\lambda : W \to K$ por
$$\lambda(w) = \mu(v_1)$$
donde $w = w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ y $f(v_1) = w_1$. Como f es inyectiva, v_1 es único, y la función λ está bien definida. Como la descomposición de $w = w_1 + w_2$ es lineal y μ y f son lineales, entonces λ lineal, es decir $\lambda \in W^*$. Por contrucción $\mu = f^* \lambda$ pues
$$f^*(\lambda)(v_1) = \lambda(f(v_1)) = \lambda(w_1) = \mu(v_1),$$
luego f^* es sobreyectiva. □

Propiedad 3.15. *Sean $V_1, V_2 \leq V$ tales que $V = V_1 \oplus V_2$; y, $\pi_1 : V \to V_1$ y $\pi_2 : V \to V_2$ respectivamente las proyecciones sobre V_1 y V_2 dadas por la descomposición $V = V_1 \oplus V_2$. Entonces*

$$V^* = \pi_1^*(V_1^*) \oplus \pi_2^*(V_2^*)$$

Dem. Dado $\lambda \in V^*$, defina $\lambda_1 \in V_1^*$ y $\lambda_2 \in V_2$ por

$$\lambda_1(v_1) = \lambda(v_1) \qquad \lambda_2(v_2) = \lambda(v_2).$$

De tal forma que si $v = v_1 + v_2 \in V$ con $v_1 = \pi_1(v)$ y $v_2 = \pi_2(v)$, entonces

$$\begin{aligned} \lambda(v) &= \lambda(v_1) + \lambda(v_2) \\ &= \lambda_1\left(\pi_1(v)\right) + \lambda_2\left(\pi_2(v)\right) \\ &= \left(\pi_1^*(\lambda_1) + \pi_2^*(\lambda_2)\right)(v) \end{aligned}$$

luego $V^* = \pi_1^*(V_1) + \pi_2^*(V_2)$. Ahora, si $\lambda \in \pi_1^*(V_1) \cap \pi_2^*(V_2)$, existen $\lambda_1 \in V_1^*$ y $\lambda_2 \in V_2^*$ tales que $\lambda = \pi_1^*(\lambda_1) = \pi_2^*(\lambda_2)$, de esta forma, para todo $v = v_1 + v_2 \in V$ con $v_1 = \pi_1(v)$ y $v_2 = \pi_2(v)$

$$\lambda(v) = \lambda(v_1) + \lambda(v_2) = \lambda_2\left(\pi_2(v_1)\right) + \lambda_1\left(\pi_1(v_2)\right) = \lambda_2(0) + \lambda_1(0) = 0.$$

Luego $\pi_1^*(V_1) \cap \pi_2^*(V_2) = \{0\}$. □

Teorema 3.16. *El mapa*

$$\begin{array}{rcl} \bullet^* : \mathrm{Hom}_K(V,W) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_K(W^*,V^*) \\ f & \longmapsto & f^* \end{array}$$

es una transformación lineal inyectiva. Si W tiene dimensión finita entonces es un isomorfismo.

Dem. Sean $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, y $c \in K$. Dado $\lambda \in W^*$ tenemos:

$$\begin{array}{rcl} (f+g)^*(\lambda) & = & \lambda \circ (f+g) \\ & = & \lambda \circ f + \lambda \circ g \\ & = & f^*(\lambda) + g^*(\lambda) \\ & = & (f^* + g^*)(\lambda) \\ (cf)^*(\lambda) & = & \lambda \circ (cf) \\ & = & c(\lambda \circ f) \\ & = & cf^*(\lambda). \end{array}$$

Es decir $(f+g)^* = f^* + g^*$ y $(cf)^* = cf^*$, y así $\bullet^*$es lineal.
Ahora suponga que $f^* = 0$, es decir $f^*(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in W^*$. Tomamos una base $\{w_i\}_{i\in I}$ de W y definimos $\{\lambda_i\}_{i\in I} \subseteq W^*$ por

$$\delta_i(v_j) = \delta_{ij}$$

Así, como en Observación 3.6, tenemos para todo $v \in V$

$$f(v) = \sum_{i\in I} \lambda_i\,(f(v))\,w_i = \sum_{i\in I} f^*(\lambda_i)(v) w_i = \sum_{i\in I} 0 w_i = 0.$$

Es decir $f = 0$ y así $\bullet^*$ es inyectiva.
Si además asumimos que W tiene dimensión finita, entonces $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ es la base de W^*, dual de $\{w_i\}_{i\in I}$. En particular $\phi \in \mathrm{Hom}^*(W^*,V^*)$ está unívocamente determinado por la imágen $\{\phi(\lambda_i)\}_{i\in I} \subseteq V^*$. Defina $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ por la suma finita

$$f(v) = \sum_{j\in I} [\phi(\lambda_j)(v)]\,w_j,$$

de forma tal que para todo $i \in I$, $v \in V$,

$$\begin{array}{rcl} f^*(\lambda_i)(v) & = & \lambda_i(f(v)) \\ & = & \lambda_i \left(\displaystyle\sum_{j\in I} [\phi(\lambda_j)(v)]\,w_j \right) \\ & = & \displaystyle\sum_{j\in I} [\phi(\lambda_j)(v)]\,\lambda_i(w_j) \\ & = & \displaystyle\sum_{i\in I} [\phi(\lambda_j)(v)]\,\delta_{ij} = \phi(\lambda_i)(v). \end{array}$$

Es decir $f^*(\lambda_i) = \phi(\lambda_i)$, para todo $i \in I$. Luego $f^* = \phi$, de donde $\bullet^*$ es también sobreyectiva, así es un isomorfismo. $\square$

Observación 3.17. Suponga que W tiene dimensión finita, sea $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ una base de W y $\lambda \in W^* = \mathrm{Hom}_K(W, K)$. Si tomamos la base $\{1\}$ de K, entonces la representación matricial de λ respecto a las base $\mathcal{B}_W$ y $\{1\}$ es

$$\Big[\lambda\Big]_{\mathcal{B}_W}^{\{1\}} = \Big[\lambda(w_1) \cdots \lambda(w_m)\Big].$$

Ahora, si $\mathcal{B}_V$ es una base de V y $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, tenemos

$$\Big[f^*(\lambda)\Big]_{\mathcal{B}_V}^{\{1\}} = \Big[\lambda \circ f\Big]_{\mathcal{B}_V}^{\{1\}} = \Big[\lambda\Big]_{S}^{\{1\}} \Big[f\Big]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}.$$

Por otro lado, podemos tomar las coordenadas de λ en la base $\mathcal{B}_W^* = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ de W^* dual de $\mathcal{B}_W$:

$$\Big[\lambda\Big]^{\mathcal{B}_W^*} = \begin{bmatrix} \lambda(w_1) \\ \vdots \\ \lambda(w_m) \end{bmatrix}$$

Si ademas asumimos que V tiene también dimensión finita y tomamos la base $\mathcal{B}_V^*$ de V^* dual de T, entonces

$$\Big[f^*(\lambda)\Big]^{\mathcal{B}_V^*} = \Big[f^*\Big]_{\mathcal{B}_W^*}^{\mathcal{B}_V^*} \Big[\lambda\Big]^{\mathcal{B}_W^*}.$$

La pregunta inmediata es: ¿Cuál es la relación entre $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}$ y $\Big[f^*\Big]_{\mathcal{B}_W^*}^{\mathcal{B}_V^*}$?

Definición 3.18. Sean I, J conjuntos y $A \in M_{I\times J}(K)$, definimos la *matriz traspuesta* de A por $A^\mathsf{T} \in M_{J\times I}(K)$ tal que

$$A^\mathsf{T}(j, i) = A(i, j)$$

para todo $(j, i) \in J \times I$. Es decir el valor en (j, i) de A^T es el valor en (i, j) de A. Similarmente si $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, y $A \in M_{m\times n}(K)$, definimos su traspuesta por $A^\mathsf{T} \in M_{n\times m}(K)$ tal que

$$A^\mathsf{T}(j, i) = A(i, j)$$

Sea $A \in M_{I\times I}(K)$, o $A \in M_{n\times n}(K)$, decimos que A es *simétrica* si $A^\mathsf{T} = A$.

Teorema 3.19. *Suponga que V y W tienen dimensión finita, $n = \dim(V) > 0$ y $m = \dim(W) > 0$, y $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Sean $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ y $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ respectivamente bases de W y V; y, sean $\mathcal{B}_W^* = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ y $\mathcal{B}_V^* = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ respectivamente las bases de W^* y V^* duales de S y T. Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ la representación matricial de f respecto a las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$, entonces $A^\mathsf{T} \in M_{n\times m}(K)$ es la representación matricial de f^* respecto a las bases $\mathcal{B}_V^*$ y $\mathcal{B}_W^*$. Es decir,*

$$\Big[f^*\Big]_{\mathcal{B}_W^*}^{\mathcal{B}_V^*} = \left(\Big[f\Big]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}\right)^\mathsf{T}$$

Dem. Si $a_{ij} \in K$ es la ij-ésima entrada de $A = \left[f\right]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}$, entonces

$$a_{ij} = \lambda_i \left(f(v_j) \right) = f^*(\lambda_i)(v_j);$$

y,

$$f^*(\lambda_i) = \sum_{l=1}^{n} \left[f^*(\lambda_i)(v_l) \right] \mu_l,$$

luego la ji-esima entrada de $\left[f^*\right]_{\mathcal{B}_W^*}^{\mathcal{B}_V^*}$ es $f^*(\lambda_i)(v_j) = a_{ij}$. $\square$

Capítulo 4

Espacios euclídeos

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

4.1. Producto interno

Definición 4.1. Un *producto interno* en V es una función

$$\begin{array}{rcl} \langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) & \longmapsto & \langle v_1; v_2 \rangle \end{array}$$

tal que:

1. *es bilineal*: para todo $v, v_1, v_2 \in V$ y $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} \langle v_1 + v_2; v \rangle & = & \langle v_1; v \rangle + \langle v_2; v \rangle \\ \langle cv_1; v_2 \rangle & = & c\langle v_1; v_2 \rangle \\ \langle v; v_1 + v_2 \rangle & = & \langle v; v_1 \rangle + \langle v; v_2 \rangle \\ \langle v_1; cv_2 \rangle & = & c\langle v_1; v_2 \rangle; \end{array}$$

2. *es simétrica*: para todo $v_1, v_2 \in V$

$$\langle v_2; v_1 \rangle = \langle v_1; v_2 \rangle;$$

3. *es definitivamente positiva* para todo $v \in V$, $v \neq 0$,

$$\langle v; v \rangle > 0.$$

Un *espacio euclídeo* es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ provisto de un producto interno.

Observación 4.2. Se sigue que $\langle v; v \rangle = 0$ si y solo si $v = 0$.

Ejemplo 4.3. 1. Sobre $V = \mathbb{R}^n$,

$$\langle (x_1, \dots, x_n); (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

2. Sobre $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$,

$$\langle A; B \rangle = \operatorname{tr}(B^{\mathsf{T}} A).$$

3. Sea $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo cerrado. Sobre $V = C^0[a, b]$, el conjunto de funciones continuas $[a, b] \to \mathbb{R}$,

$$\langle f; g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Definición 4.4. Dado un espacio euclídeo V, definimos la norma de $v \in V$ por $\|v\| = \sqrt{\langle v; v\rangle}$.

Propiedad 4.5. *Sea V un espacio euclídeo, entonces:*

1. $\|cv\| = |c|\|v\|$, *para todo $c \in \mathbb{R}$ y $v \in V$;*
2. Desigualdad de Cauchy-Schwarz*: $|\langle v_1; v_2\rangle| \leq \|v_1\|\|v_2\|$, para todo $v_1, v_2 \in V$, más aún se tiene $|\langle v_1; v_2\rangle| = \|v_1\|\|v_2\|$ únicamente cuando $\{v_1, v_2\}$ es linealmente dependiente; y,*
3. Desigualdad triangular*: $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$, para todo $v_1, v_2 \in V$, más aún se tiene $\|v_1 + v_2\| = \|v_1\| + \|v_2\|$ si y solo si $av_1 = bv_2$ con $a, b \geq 0$.*

Dem.

1. Dados $c \in \mathbb{R}$ y $v \in V$

$$\|cv\| = \sqrt{\langle cv; cv\rangle} = \sqrt{c^2\langle v; v\rangle} = |c|\sqrt{\langle v; v\rangle} = |c|\|v\|.$$

2. Si $v_1 = 0$ o $v_2 = 0$ tenemos $0 = |\langle v_1, v_2\rangle| = \|v_1\|\|v_2\|$. En el caso general, para todo $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|av_1 - bv_2\|^2 &= \langle av_1 - bv_2, av_1 - bv_2\rangle \\ &= a^2\langle v_1, v_1\rangle - ab\langle v_2, v_1\rangle - ab\langle v_1, v_2\rangle + b^2\langle v_2, v_2\rangle \\ &= a^2\|v_1\|^2 - 2ab\langle v_1, v_2\rangle + b^2\|v_2\|^2. \end{aligned}$$

Si suponemos ahora que $v_2 \neq 0$, es decir $\|v_2\|^2 > 0$, y $a \neq 0$, dividiendo por a^2, obtenemos así una expresión cuadrática en b/a, pósitiva o nula para todo valor, luego su discriminante satisface

$$4\langle v_1, v_2\rangle^2 - 4\|v_1\|^2\|v_2\|^2 \leq 0$$

Lo cual implica la desigualdad deseada. Igualmente, esta expresión cuadrática se anula, es decir $av_1 - bv_2 = 0$ para algún $a, b \in \mathbb{R}$, si y solo si su discrimante es cero, es decir si y solo si $\langle v_1, v_2\rangle^2 = \|v_1\|^2\|v_2\|^2$.

3. Tomando $a = 1$ y $b = -1$ en la expresión arriba, obtenemos
$$\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + 2\langle v_1; v_2\rangle + \|v_2\|^2;$$
y la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica
$$\|v_1 + v_2\|^2 \leq \|v_1\|^2 + 2\|v_1\|\|v_2\| + \|v_2\|^2 = (\|v_1\| + \|v_2\|)^2$$
que es equivalente a la desigualdad afirmada. Se obtiene una igualdad en la desigualdad triangular si y solo si $\langle v_1, v_2\rangle = \|v_1\|\|v_2\|$, lo cual equivale a $av_1 - bv_2 = 0$ donde $a = \|v_2\|$ y $b = \|v_1\|$. □

Observación 4.6. En vista de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, es usual definir el ángulo entre v_1 y v_2 por $\theta = \arccos(\langle v_1; v_2\rangle / \|v_1\|\|v_2\|)$, siempre que $v_1 \neq 0$ y $v_2 \neq 0$. La dirección, o el signo, del ángulo no se puede definir intrínsecamente a partir del producto interno, hace falta definir una orientación. Con está definición del ángulo entre dos elementos distintos del origen en un espacio euclídeo, se empata con la definición clásica, según la cual
$$\langle v_1; v_2\rangle = \|v_1\|\|v_2\| \cos\theta.$$
cuando $v_1 \neq 0$ y $v_2 \neq 0$. El caso particular de mayor interés es naturalmente cuando existe una relación de ortogonalidad entre v_1 y v_2.

Definición 4.7. Sea V un espacio euclídeo y $S \subseteq V$. Decimos que S es *ortogonal* si $\langle v_1; v_2\rangle = 0$ para todo $v_1, v_2 \in T$ tales que $v_1 \neq v_2$. Si además $\|v\| = 1$ para todo $v \in S$, decimos que S es *ortonormal*.

Observación 4.8. Note que $S = \{v_i\}_{i\in I}$ es ortonormal si y solo si
$$\langle v_i; v_j\rangle = \delta_{ij}.$$
para todo $i, j \in I$.

Propiedad 4.9. *Sea V un espacio euclídeo. Si $S \subset V$ es ortogonal, y $0 \notin S$, entonces S es linealmente independiente.*

Dem. Suponga que $v_1, \ldots, v_n \in S$ y $a_1, \ldots, a_n \in S$ son tales que
$$a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = 0.$$
Entonces, para $i = 1, \ldots, n$,
$$0 = \langle 0; v_i\rangle = \langle a_1v_1 + \cdots + a_nv_n; v_i\rangle = a_1\langle v_1; v_i\rangle + \ldots + a_n\langle v_n; v_i\rangle = a_i\|v_i\|^2,$$
pero $v_i \neq 0$ pues $0 \notin S$, luego $\|v_i\|^2 \neq 0$, y así $a_i = 0$. □

Teorema 4.10 (Ortogonalización de Gram-Schmidt)**.** *Sea V un espacio euclídeo. Suponga que V tiene dimensión finita, entonces V tiene una base ortonormal. Más aún, si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, existe una base ortonormal $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de V tal que para $k = 1, \ldots, n$*
$$\langle v_1, \ldots, v_k\rangle = \langle u_1, \ldots, u_k\rangle.$$

Dem. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V, definimos recursivamente $\{v_1', \dots, v_n'\}$ por

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 \\ v_{k+1}' &= v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}; v_i' \rangle}{\|v_i'\|^2} v_i'. \end{aligned}$$

Veamos que $\{v_1', \dots, v_n'\}$ es ortogonal. Para esto, basta establecer por inducción que, si $1 \leq k < n$, entonces $\langle v_{k+1}'; v_j' \rangle = 0$ para $1 \leq j \leq k$. Para el caso base, $k = 1 = j$ y

$$\begin{aligned} \langle v_2'; v_1' \rangle &= \langle v_2; v_1' \rangle - \frac{\langle v_2; v_1' \rangle}{\|v_1'\|^2} \langle v_1'; v_1' \rangle \\ &= \langle v_2, v_1' \rangle - \langle v_2; v_1' \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para el paso inductivo, asumimos que $\langle v_i'; v_j' \rangle = 0 = \langle v_j'; v_i' \rangle$, siempre que $1 \leq i < j \leq k$, de tal forma que si $1 \leq j \leq k$,

$$\begin{aligned} \langle v_{k+1}'; v_j' \rangle &= \langle v_{k+1}; v_j' \rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}; v_i' \rangle}{\|v_i'\|^2} \langle v_i'; v_j' \rangle \\ &= \langle v_{k+1}; v_j' \rangle - \frac{\langle v_{k+1}; v_j' \rangle}{\|v_j'\|^2} \langle v_j'; v_j' \rangle \\ &= \langle v_{k+1}; v_j' \rangle - \langle v_{k+1}; v_j' \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Además recursivamente vemos que

$$\begin{aligned} \langle v_1 \rangle &= \langle v_1' \rangle \\ \langle v_1, \dots, v_{k+1} \rangle &= \langle v_1', \dots, v_{k+1}' \rangle \end{aligned}$$

pues $v_{k+1} - v_{k+1}' \in \langle v_1', \dots, v_k' \rangle = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Note que, como $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente, entonces $v_{k+1} \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle v_1', \dots, v_k' \rangle$, luego $v_{k+1}' \notin \langle v_1', \dots, v_k' \rangle$ y así, para $i = 1, \dots, n$, $v_i' \neq 0$. De donde, como $\{v_1', \dots, v_n'\}$ es ortogonal y no contiene al origen, es un conjunto linealmente independiente con el mismo número de elementos que la dimensión de V, entonces es una base de V.

Finalmente, para obtener la base ortonormal basta tomar, para $i = 1, \dots, n$,

$$u_i = \frac{1}{\|v_i'\|} v_i'.$$

Tenemos para $k = 1, \dots, n$

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle v_1', \dots, v_k' \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle.$$

$\square$

Propiedad 4.11. *Sea V un espacio euclídeo. Suponga que V tiene dimensión finita y $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de V, entonces para todo $v \in V$*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v; u_i \rangle u_i.$$

En particular, si $v_1, v_2 \in V$ son tales que

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \qquad v_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i,$$

entonces

$$\langle v_1; v_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Dem. Como $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es base, existen $a_1, \ldots, a_n \in K$ tal que $v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$. De esta forma, para $j = 1, \ldots, n$,

$$\langle v; u_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_i; u_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_j$$

(ver Observación 4.8). Finalmente,

$$\langle v_1; v_2 \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i u_i; \sum_{j=1}^{n} y_j u_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

$\square$

Observación 4.12. Si $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de V, la propiedad anterior implica que para todo $v_1, v_2 \in V$ tenemos

$$\langle v_1; v_2 \rangle = \left(\left[v_2 \right]^{\mathcal{B}} \right)^{\mathsf{T}} \left[v_1 \right]^{\mathcal{B}}$$

Definición 4.13. Sean V un espacio euclídeo y $S \subseteq V$, el *conjunto ortogonal* a S está definido por

$$S^{\perp} = \{ v \in V | \ \langle v; u \rangle = 0, \ \text{para todo } u \in S \}$$

Propiedad 4.14. *Sean V un espacio euclídeo y $S \subseteq V$, entonces $S^{\perp} \leq V$.*

Dem. Como $\langle 0, v \rangle = 0$ para todo $v \in V$, $0 \in S^{\perp}$. Tome ahora $v_1, v_2, v \in S^{\perp}$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces para todo $u \in S$

$$\begin{aligned} \langle v_1 + v_2; u \rangle &= \langle v_1; u \rangle + \langle v_2; u \rangle = 0 \\ \langle av; u \rangle &= a \langle v; u \rangle = 0 \end{aligned}$$

luego $v_1 + v_2 \in S^{\perp}$ y $av \in S^{\perp}$; así, $S^{\perp}$ es un subespacio de V. $\square$

Teorema 4.15. *Sea V un espacio euclídeo. Suponga que V tiene dimensión finita y sea $U \leq V$, entonces*

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

Dem. Sean $n = \dim(V)$, $m = \dim(U)$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V tal que $\{v_1, \dots, v_m\}$ es una base de U. Sea $\{u_1, \dots, u_n\}$ la base obtenida mediante ortogonalización a partir de $\{v_1, \dots, v_n\}$. En particular $U = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$ y $\langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle \leq U^{\perp}$. Tome $v \in U^{\perp}$, tenemos

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v; u_i \rangle u_i = \sum_{i=m+1}^{n} \langle v; u_i \rangle u_i,$$

luego $v \in \langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle$. Entonces $U^{\perp} = \langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle$ y $V = U \oplus U^{\perp}$. □

Definición 4.16. Sea V un espacio euclídeo de dimensión finita y $U \leq V$. Llamamos a $U^{\perp}$ el *complemento ortogonal de U*. A la proyección

$$p_U^{\perp} : V \longrightarrow V$$

sobre U, definida por la descomposición $V = U \oplus U^{\perp}$ la llamamos *proyección ortogonal sobre U*.

Propiedad 4.17. *Sea V un espacio euclídeo de dimensión finita,* $\dim(V) = n$, *y $\langle v_1, \dots, v_m \rangle = U \leq V$. Si $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V y $\{v_1, \dots, v_m\}$ es linealmente independiente entonces*

$$\left[p_U^{\perp}\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A(A^{\intercal}A)^{-1}A^{\intercal}$$

donde $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ es la matrix cuya j-ésima columna es $\left[v_j\right]^{\mathcal{B}}$, $j = 1, \dots, n$.

Dem. Para todo $v \in V$ tenemos $p_U^{\perp}(v) \in U$ luego existe un único $\overline{c}_v \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$ tal que

$$\left[p_U^{\perp}(v)\right]^{\mathcal{B}} = Ac_v$$

Si $P = \left[p_U^{\perp}\right]^{\mathcal{B}}$, y $\overline{x} = \left[v\right]^{\mathcal{B}}$ entonces

$$P\overline{x} = A\overline{c}_v.$$

Ahora como $v - p_U^{\perp}(v) \in U^{\perp}$ entonces $\langle v - p_U^{\perp}(v); v_j \rangle = 0$ para $j = 1, \dots, n$ luego (ver Observación 4.12)

$$\left(\left[v_j\right]^{\mathcal{B}}\right)^{\intercal} (\overline{x} - A\overline{c}_v) = 0$$

y

$$\begin{aligned} 0 &= A^{\intercal}(\overline{x} - A\overline{c}_v) \\ &= A^{\intercal}\overline{x} - A^{\intercal}A\overline{c}_v \end{aligned}$$

Veamos que $A^\intercal A \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ es invertible. De hecho, si $\{u_1,\ldots,u_m\}$ es una base ortonormal de U y $c_{ij}\in\mathbb{R}$, $i,j=1,\ldots,m$, son tales que

$$u_j = c_{1j}v_1 + \ldots + c_{mj}v_m, \quad j=1,\ldots,m$$

y $C=(c_{ij})$ entonces $C\in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ es invertible y la j-ésima columna de AC es $\left[u_j\right]^{\mathcal{B}}$. Así

$$I_m = (AC)^\intercal AC = C^\intercal A^\intercal AC$$

y $A^\intercal A = (CC^\intercal)^{-1}$, luego $A^\intercal A$ es invertible. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \overline{c}_v &= (A^\intercal A)^{-1}A\overline{x} \\ A\overline{c}_v &= A(A^\intercal A)^{-1}A\overline{x} \\ P\overline{x} &= A(A^\intercal A)^{-1}A\overline{x} \end{aligned}$$

y se sigue $P = A(A^\intercal A)^{-1}A^\intercal$. □

Propiedad 4.18. *Sea V un espacio euclídeo. Suponga que V tiene dimensión finita y sea $U\leq V$. Tenemos para todo $v_1,v_2\in V$*

$$\langle p_U^\perp(v_1); v_2\rangle = \langle v_1; p_U^\perp(v_2)\rangle.$$

Si $\{u_1,\ldots,u_m\}$ es una base ortonormal de U entonces para todo $v\in V$

$$p_U^\perp(v) = \sum_{i=1}^m \langle v; u_i\rangle u_i.$$

Dem. Sea $v_1', v_2' \in U^\perp$ tales que

$$v_1 = p_U^\perp(v_1) + v_1' \qquad v_2 = p_U^\perp(v_2) + v_2'.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \langle p_U^\perp(v_1); v_2\rangle &= \langle p_U^\perp(v_1); p_U^\perp(v_2)\rangle + \langle p_U^\perp(v_1); v_2'\rangle = \langle p_U^\perp(v_1); p_U^\perp(v_2)\rangle \\ \langle v_1; p_U^\perp(v_2)\rangle &= \langle p_U^\perp(v_1); p_U^\perp(v_2)\rangle + \langle v_1'; p_U^\perp(v_2)\rangle = \langle p_U^\perp(v_1); p_U^\perp(v_2)\rangle. \end{aligned}$$

Finalmente, si completamos la base ortonormal $\{u_1,\ldots,u_m\}$ de U a una base ortonormal $\{u_1,\ldots,u_n\}$ de V,

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^m \langle v; u_i\rangle u_i}_{\in U} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^n \langle v; u_i\rangle u_i}_{\in U^\perp}.$$

□

Observación 4.19. Los operadores sobre un espacio euclídeo que, como la proyección ortogonal, pasan de un lado al otro del producto interno tienen varias propiedades, la más importante de ellas es que son diagonalizables, el cual es el contenido del Teorema Espectral. Antes de establecer este resultado, necesitamos elaborar la teoría de los operadores adjuntos.

4.2. Operador adjunto

Sea V un espacio euclídeo y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ un operador.

Definición 4.20. Sea $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$, decimos que g es un *operador adjunto de* f si para todo $v_1, v_2 \in V$

$$\langle g(v_1); v_2\rangle = \langle v_1; f(v_2)\rangle.$$

Decimos que f es *auto-adjunto* si f es un operador adjunto de f.

Observación 4.21. Note que si g es adjunto de f, entonces f es adjunto de g. De hecho

$$\langle f(v_1); v_2\rangle = \langle v_2; f(v_1)\rangle = \langle g(v_2); v_1\rangle = \langle v_1; g(v_2)\rangle$$

Proposición 4.22. *Suponga que V tiene dimensión finita, entonces existe un único operador $g \in \mathrm{Hom}_R(V, V)$ adjunto de f. Más aún, si $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de V, entonces*

$$\Big[g\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left(\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^{\mathsf{T}}$$

Dem. Defina el operador $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ por la imagen de la base $\mathcal{B}$:

$$g(u_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle u_j; f(u_i)\rangle u_i.$$

De esta forma

$$\langle g(u_j); u_i\rangle = \langle u_j; f(u_i)\rangle$$

y por bilinearidad del producto interno, g es adjunto de f. Por otro lado si, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ es adjunto de f, por Propiedad 4.11,

$$\begin{aligned} h(u_j) &= \sum_{i=1}^{n} \langle h(u_j); u_i\rangle u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle u_j; f(u_i)\rangle u_i \\ &= g(u_j), \end{aligned}$$

luego $h = g$.

Ahora, para ver que la representación matricial de g respecto a $\mathcal{B}$ es la traspuesta de la de f basta observar que

$$\begin{aligned}\Big[g\Big]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B},(j,i)} &= \Big[g(u_i)\Big]^{\mathcal{B}}_{j} \\ &= \langle g(u_i); u_j\rangle \\ &= \langle u_i; f(u_j)\rangle \\ &= \langle f(u_j); u_i\rangle \\ &= \Big[f(u_j)\Big]^{\mathcal{B}}_{i} \\ &= \Big[f\Big]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B},(i,j)}\end{aligned}$$

□

Notación 4.23. Si V tiene dimensión finita, a la adjunta de f la denotaremos por f^*.

Observación 4.24. En particular $(f^*)^* = f$. Note que la notación de la adjunta es la misma que la notación para transformación dual. Mientras que la adjunta sigue siendo un operador de V, el dual de un operador es un operador en V^*. Confundir las dos notaciones tiene su fundamento en la siguiente propiedad.

Propiedad 4.25. *El mapa*

$$\begin{aligned}\imath : V &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto \imath_v = \langle \bullet; v\rangle : v' \mapsto \langle v'; v\rangle\end{aligned}$$

es una transformación lineal inyectiva, la cual es un isomorfismo si V tiene dimensión finita.

Dem. Por la linearidad en el segundo factor del producto interno, $\imath$ es una transformación lineal. Suponga ahora que $\imath_v = 0$, en particular $0 = \imath_v(v) = \langle v, v\rangle = \|v\|^2$, luego $v = 0$ y así $\imath$ es inyectiva. Finalmente como $\dim(V) = \dim(V^*)$ cuando V tiene dimensión finita, entonces $\imath$ en este caso también es sobreyectiva, y es un isomorfismo.

Proposición 4.26. *Suponga que V tiene dimensión finita y sea*

$$\begin{aligned}\widehat{\bullet} : V &\longrightarrow (V^*)^* \\ v &\longmapsto \widehat{v} : \lambda \mapsto \lambda(v).\end{aligned}$$

el isomorfismo canónico. Entonces para todo $v \in V$

$$\imath^*(\widehat{v}) = \imath(v).$$

Dem. Para todo $v' \in V$

$$\begin{aligned}\imath^*(\widehat{v})(v') &= \widehat{v}(\imath(v')) \\ &= \imath(v')(v) \\ &= \langle v; v'\rangle \\ &= \langle v'; v\rangle \\ &= \imath(v)(v').\end{aligned}$$

□

Observación 4.27. Note que si V tiene dimensión finita, para todo $v' \in V$,

$$\begin{aligned} f^*(\imath_v)(v') &= \imath_v(f(v')) \\ &= \langle f(v'); v\rangle \\ &= \langle v'; f^*(v)\rangle \\ &= \imath_{f^*(v)}(v') \end{aligned}$$

luego $f^*(\imath_v) = \imath_{f^*(v)}$, es decir

$$f^* \circ \imath = \imath \circ f^*,$$

lo cual justifica la confusión entre las dos notaciones de dual y adjunto (en la última igualdad, f^* a la izquierda es el dual de f, mientras que a la derecha es el adjunto); pues, a través del isomorfismo $\imath$, ambos conceptos coinciden.

Observación 4.28. Suponga que V tiene dimensión finita y sean $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de V y $\mathcal{B}^* = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ la base de V^* dual de $\mathcal{B}$. Tomamos la imagen de $\mathcal{B}$ mediante el isomorfismo canónico $V \mapsto (V^*)^*$, la cual es la base $\widehat{\mathcal{B}} = \{\widehat{v_1}, \ldots, \widehat{v_m}\}$ de $(V^*)^*$ dual de $\mathcal{B}^*$. La proposición anterior implica que si tomamos las representaciones matriciales en $M_{m\times m}(\mathbb{R})$

$$A = \Big[\imath\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}, \text{ y } B = \Big[\imath^*(\widehat{\bullet})\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*} = \Big[\imath^*\Big]_{\widehat{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}^*}\Big[\widehat{\bullet}\Big]_{\mathcal{B}}^{\widehat{\mathcal{B}}} = \Big[\imath^*\Big]_{\widehat{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}^*},$$

entonces $B = A$, pero por otro lado $B = A^\intercal$, luego $A^\intercal = A$. Es decir, la representación matricial de $\imath$ respecto a una base y su dual es simétrica.

Observación 4.29. Note que si V tiene dimensión finita, $f^* \circ f$ es auto-adjunta, de hecho para todo $v_1, v_2 \in V$

$$\langle f^* \circ f(v_1); v_2\rangle = \langle f(v_1); f(v_2)\rangle = \langle v_1; f^* \circ f(v_2)\rangle$$

Proposición 4.30. *Si V tiene dimensión finita, las siguientes dos propiedades son equivalentes:*

1. *f es auto-adjunta; y,*
2. *la representación matricial de f respecto a toda base ortonormal es simétrica.*

Dem. Proposición 4.22 implica que si f es auto-adjunta, su representación matricial respecto a una base ortogonal es simétrica. Para obtener el converso, tomamos una base ortonormal de V, $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y asumimos que $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ es simétrica, es decir para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\langle f(u_j); u_i\rangle = \Big[f\Big]_{\mathcal{B},(i,j)}^{\mathcal{B}} = \Big[f\Big]_{\mathcal{B},(j,i)}^{\mathcal{B}} = \langle f(u_i); u_j\rangle,$$

luego

$$\langle f(u_j); u_i\rangle = \langle f(u_i); u_j\rangle = \langle u_j; f(u_i)\rangle$$

lo cual, por bilinearidad del producto interno, implica que f es auto-adjunta. $\square$

Observación 4.31. Nos disponemos ahora a estudiar la descomposición de Jordan-Chevalley de los operadores auto-adjuntos. El ingrediente fundamental será establecer que las partes diagonalizable y nilpotente son en este caso también auto-adjuntos.

Lema 4.32. *Suponga que f es auto-adjunto, entonces*

1. *Para todo $P(t) \in \mathbb{R}[t]$, $P(f)$ es auto-adjunto;*
2. *si f es nilpotente, $f = 0$; y,*
3. *si $v_1, v_2 \in V$ son vectores propios asociados a valores propios distintos, entonces $\langle v_1, v_2\rangle = 0$.*

Dem.

1. Note primero que para todo $v_1, v_2 \in V$, recursivamente establecemos que para $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,
$$\langle f^i(v_1); v_2\rangle = \langle v_1; f^i(v_2)\rangle.$$
Ahora, si $P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ entonces para todo $v_1, v_2 \in V$
$$\begin{aligned} \langle P(f)(v_1); v_2\rangle &= \langle \sum_{k=0}^n a_k f^k(v_1); v_2\rangle \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \langle f^k(v_1); v_2\rangle \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \langle v_1; f^k(v_2)\rangle \\ &= \langle v_1; \sum_{k=0}^n a_k f^k(v_2)\rangle \\ &= \langle v_1; P(f)(v_2)\rangle. \end{aligned}$$

2. Sea $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ el grado de nilpotencia de f. Asuma por contradicción que $r > 1$, luego $r \geq 2$, y existe $v \in V$ tal que $f^{r-1}(v) \neq 0$; pero en tal caso
$$\|f^{r-1}(v)\|^2 = \langle f^{r-1}(v); f^{r-1}(v)\rangle = \langle f^r(v); f^{r-2}(v)\rangle = \langle 0; f^{r-2}(v)\rangle = 0$$
luego $f^{r-1}(v) = 0$, lo cual contradice la elección de v. Luego $r = 1$ y así $f = 0$.

3. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, tales que $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ y $f(v_2) = \lambda_2 v_2$. Así

$$\lambda_1 \langle v_1; v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1; v_2 \rangle = \langle f(v_1); v_2 \rangle = \langle v_1; f(v_2) \rangle = \langle v_1; \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1; v_2 \rangle,$$

luego

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1; v_2 \rangle = 0,$$

pero como $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, $\langle v_1; v_2 \rangle = 0$. □

Teorema 4.33 (Teorema Espectral)**.** *Suponga que V tiene dimensión finita, f es auto-adjunta y que*

$$P_f(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} (t - \lambda_2)^{m_2} \dots (t - \lambda_r)^{m_r}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}.$$

entonces existe una base ortonormal $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ de V tal que $\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ es diagonal.

Dem. Por Teorema 2.53 existen $P_D(t), P_N(t) \in \mathbb{R}[t]$, tales que si $f_D = P_D(f)$ y $f_N = P_N(f)$ entonces $f = f_D + f_N$ es la descomposición de Jordan-Chevalley, es decir f_D es diagonalizable y f_N nilpontente y estas conmutan. Ahora, por el lema, f_N es auto-adjunta y así, como es nilpotente, $f_N = 0$. Luego $f = f_D$ es diagonalizable. Para $i = 1, \dots, r$, denote V_i el espacio generado por los vectores propios de f asociados a λ_i, es decir

$$V_i = \{v \in V |\ f(v) = \lambda_i v\},$$

de forma que, como f es diagonalizable,

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r.$$

Por el lema también sabemos que si $v_i \in V_i$ y $v_j \in V_j$, $i \neq j$, tenemos $\langle v_i; v_j \rangle = 0$, luego si $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ son respectivamente bases ortonormales de $V_1, \dots, V_r$,

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$$

es una base ortonormal de V formada por vectores propios de f, en particular, $\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ es diagonal. □

Observación 4.34. Más adelante, cuando estudiemos la versión compleja del teorema espectral, veremos que el polinomio característico de un operador auto-adjunto sobre un espacio euclídeo de dimensión finita siempre se puede factorizar en factores lineales en $\mathbb{R}[t]$, lo cual a su vez implicará que estos operadores son siempre diagonalizables mediante una base ortonormal. Estudiemos ahora con más detalle este tipo bases.

4.3. Operadores ortogonales

Sea V un espacio euclídeo y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ un operador.

Definición 4.35. Decimos que f es un *operador ortogonal* si para todo $v_1, v_2 \in V$

$$\langle f(v_1); f(v_2)\rangle = \langle v_1; v_2\rangle.$$

Observación 4.36. Tenemos

$$\begin{aligned} \|v_1 + v_2\|^2 &= \langle v_1 + v_2; v_1 + v_2\rangle \\ &= \langle v_1; v_1\rangle + \langle v_2; v_1\rangle + \langle v_1; v_2\rangle + \langle v_2; v_2\rangle \\ &= \|v_1\|^2 + 2\langle v_1; v_2\rangle + \|v_2\|^2, \end{aligned}$$

de forma que el producto interno se puede expresar en términos de la norma:

$$\langle v_1; v_2\rangle = \frac{\|v_1 + v_2\|^2 - \left(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2\right)}{2}.$$

De esto podemos concluir que f es ortogonal si y solo f preserva la norma, es decir $\|f(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in V$.

Proposición 4.37. *Si V tiene dimensión finita, las siguiente propiedades son equivalentes*

1. *f es ortogonal;*
2. *f preserva la norma;*
3. *$f^* \circ f = \mathrm{id}_V$; y,*
4. *la imagen por f de una base ortonormal es una base ortonormal.*

Dem. La observación muestra la equivalencia entre las dos primeras propiedades. Veamos ahora la equivalencia entre la primera y la tercera. Suponga primero que f es ortogonal y sea $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal de V. Para todo $v \in V$

$$\begin{aligned} f^* \circ f(v) &= \sum_{i=1}^{n} \langle f^* \circ f(v); u_i\rangle u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle f(v); f(u_i)\rangle u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle v; u_i\rangle u_i \\ &= v. \end{aligned}$$

Suponga ahora que $f^* \circ f = \mathrm{id}_V$, entonces para todo $v_1, v_2 \in V$

$$\langle f(v_1); f(v_2)\rangle = \langle f^* \circ f(v_1); v_2\rangle = \langle v_1; v_2\rangle.$$

Finalmente establecemos la equivalencia entre la primera propiedad y la cuarta. Si f es ortogonal y $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots u_n\}$ entonces

$$\langle f(u_i); f(u_j)\rangle = \langle u_i; u_j\rangle = \delta_{ij}$$

para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, así $f(\mathcal{B})$ es una base ortonormal (ver Observación 4.8). Recíprocamente, asuma que f envía una base ortonormal $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$, a la base ortonormal $f(\mathcal{B}) = \{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$. Luego, para todo $v_1, v_2 \in V$, si $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ son tales que

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \qquad v_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i,$$

entonces

$$f(v_1) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(u_i) \qquad v_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i f(u_i)$$

y, por Propiedad 4.11,

$$\langle f(v_1); f(v_2)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle v_1; v_2\rangle.$$

$\square$

Observación 4.38. Note que implícitamente la tercera propiedad está diciendo que los operadores ortogonales sobre espacios euclídeos de dimensión finita son invertibles, pues su inversa es su adjunta; y la cuarta que esta inversa es también ortogonal, pues también envía una base ortogonal en una base ortogonal.

Definición 4.39. Decimos que $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es una *matriz ortogonal* si

$$A^\intercal A = I_n$$

donde I_n denota la matriz con unos en la diagonal y ceros en el resto de entradas.

Proposición 4.40. *Si V tiene dimensión finita y $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de V, f es ortogonal si y solo si $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ es ortogonal.*

Dem. La proposición se sigue del hecho que si $A = \Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, entonces $A^\intercal = \Big[f^*\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ y

$$A^\intercal A = \Big[f^*\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \Big[f^* \circ f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}.$$

Entonces $A^\intercal A = I_n$ si y solo si $f^* \circ f = \mathrm{id}_V$. $\square$

Teorema 4.41. *Si V tiene dimensión finita igual a n, la colección de operadores ortogonales de V está en correspondencia biyectiva con la colección de n-tuplas $(v_1, \ldots, v_n) \in V \times \ldots \times V$ tales que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal de V.*

Dem. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots u_n\}$ una base ortonormal de V. Dado un operador ortogonal $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$, le asociamos la n-tupla

$$(g(u_1), \ldots, g(u_n)) .$$

Dada la n-tupla $(v_1, \ldots, v_n) \in V \times \ldots \times V$ tal que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal de V, le asociamos el operador definido sobre la base $\mathcal{B}$ por

$$u_1 \mapsto v_1, \ldots, u_n \mapsto v_n.$$

Las equivalencias en Proposición 4.37 implican que $(g(u_1), \ldots, g(u_n))$ es una n-tupla cuyas componentes forman una base ortonormal de V y que el operador tal que $u_1 \mapsto v_1, \ldots, u_n \mapsto v_n$ es ortogonal. Las dos asociaciones son una la inversa de la otra. $\square$

Observación 4.42. Note que la correspondencia descrita en la prueba del teorema depende de la escogencia de la base $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots u_n\}$ y del ordenamiento de los elementos que la conforman. Vale la pena subrayar el hecho que los operadores ortogonales se pueden componer entre si y obtener un tercer operador ortogonal, y también invertir y obtener otro operador ortogonal. Conjuntos con estas propiedades se les llama grupos. Una vez se fija una base, junto con un ordenamiento de sus elementos, la correspondencia del teorema respeta la estructura de grupo.
Formalmente, si G denota la colleción de operadores ortogonales de V, X la de n-tuplas cuyas componentes formán bases ortogonales y

$$\begin{array}{rcl} \Phi_T : G & \longrightarrow & X \\ g & \longmapsto & (g(u_1), \ldots, g(u_n)) \end{array}$$

es la correspondencia biyectiva definida por T (junto con un ordenamiento), entonces

$$\begin{array}{rcl} \Phi_T(\mathrm{id}_V) & = & (u_1, \ldots u_n) \\ \Phi_T(g \circ h) & = & g\left(\Phi_T(h)\right) \end{array}$$

para todo $g, h \in G$, donde definimos $g(v_1, \ldots, v_n) = (g(v_1), \ldots, g(v_n))$ para todo $(v_1, \ldots, v_n) \in X$. Más general

$$\begin{array}{rcl} \Phi : X \times G & \longmapsto & X \times X \\ (x, g) & \longmapsto & (x, gx) \end{array}$$

es una biyección, en la cual, si fijamos el primer factor en $x = (u_1, \ldots u_n)$, obtenemos en el segundo la biyeccion ϕ_T.

Capítulo 5

Espacios unitarios

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Notación 5.1. Dado un escalar $c \in \mathbb{C}$, denotamos por $\overline{c}$ a su conjugado el cual está definido por

$$\overline{c} = a - bi, \text{ si } c = a + bi, \ a, b \in \mathbb{R},$$

por $|c| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c\overline{c}}$ a su norma, por $\mathrm{Re}(c) = a = (c + \overline{c})/2$ su parte real y por $\mathrm{Im}(c) = b = (c - \overline{c})/2i$ su parte imaginaria.

Observación 5.2. Bastantes elementos elaborados en este capítulo se establecen por argumentos similares a los expuestos durante el desarrollo de la teoría de espacios euclídeos. En tales casos, dejaremos la verificación de los detalles al lector.

5.1. Producto hermítico

Definición 5.3. Un *producto hermítico* en V es una función

$$\begin{array}{rcl} \langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (v_1, v_2) & \longmapsto & \langle v_1; v_2 \rangle \end{array}$$

tal que:

1. *es sesquilineal*: para todo $v, v_1, v_2 \in V$ y $c \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{rcl} \langle v_1 + v_2; v \rangle & = & \langle v_1; v \rangle + \langle v_2; v \rangle \\ \langle cv_1; v_2 \rangle & = & c\langle v_1; v_2 \rangle \\ \langle v; v_1 + v_2 \rangle & = & \langle v; v_1 \rangle + \langle v; v_2 \rangle \end{array}$$

2. *es hermítica*: para todo $v_1, v_2 \in V$

$$\langle v_2; v_1 \rangle = \overline{\langle v_1; v_2 \rangle};$$

3. *es definitivamente positiva* para todo $v \in V$, $v \neq 0$,

$$\langle v; v\rangle > 0.$$

Un *espacio unitario* es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ provisto de un producto hermítico.

Observación 5.4. Se sigue que $\langle v; v\rangle = 0$ si y solo si $v = 0$ y que para todo $v, v_1, v_2 \in V$ y $c \in \mathbb{C}$

$$\langle v_1; cv_2\rangle = \overline{c}\langle v_1; v_2\rangle$$

Ejemplo 5.5.

1. Sobre $V = \mathbb{C}^n$,

$$\langle (z_1, \ldots, z_n); (w_1, \ldots, w_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i\overline{w_i}.$$

2. Sobre $V = M_{n\times n}(\mathbb{C})$,

$$\langle A; B\rangle >= \mathrm{tr}(B^*A).$$

   donde $B^* = \overline{B}^{\intercal}$ es la matriz cuyas entradas son las conjugadas de las entradas de las matriz traspuesta de B.

3. Sea $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo cerrado. Sobre $V = C^0_{\mathbb{C}}[a, b]$, el conjunto de funciones continuas $[a, b] \to \mathbb{C}$,

$$\langle f; g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Definición 5.6. Dado un espacio hermítico V, definimos la norma de $v \in V$ por $\|v\| = \sqrt{\langle v; v\rangle}$.

Propiedad 5.7. *Sea V un espacio unitario, entonces:*

1. $\|cv\| = |c|\|v\|$, *para todo $c \in \mathbb{C}$ y $v \in V$;*

2. Desigualdad de Cauchy-Schwarz*: $|\langle v_1; v_2\rangle| \leq \|v_1\|\|v_2\|$, para todo $v_1, v_2 \in V$, más aún se tiene $\langle v_1, v_2\rangle = \|v_1\|\|v_2\|$ únicamente cuando $\{v_1, v_2\}$ es linealmente dependiente; y,*

3. Desigualdad triangular*: $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$, para todo $v_1, v_2 \in V$, más aún se tiene $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$ si y solo si $av_1 = bv_2$ con $a, b \geq 0$.*

Dem.

1. Dados $c \in \mathbb{C}$ y $v \in V$

$$\|cv\| = \sqrt{\langle cv; cv\rangle} = \sqrt{c\overline{c}\langle v; v\rangle} = |c|\sqrt{\langle v; v\rangle} = |c|\|v\|.$$

2. Si $v_1 = 0$ o $v_2 = 0$, se tiene $0 = \langle v_1; v_2\rangle = \|v_1\|\|v_2\|$ y se sigue la desigualdad. En general, para todo $a, b \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|av_1 - bv_2\|^2 &= \langle av_1 - bv_2, av_1 - bv_2\rangle \\ &= a\overline{a}\langle v_1; v_1\rangle - b\overline{a}\langle v_2; v_1\rangle - a\overline{b}\langle v_1; v_2\rangle + b\overline{b}\langle v_2; v_2\rangle \\ &= |a|^2\|v_1\|^2 - \left(\overline{a}b\overline{\langle v_1; v_2\rangle} + a\overline{b}\langle v_1; v_2\rangle\right) + |b|^2\|v_2\|^2. \end{aligned}$$

En particular si $a = \|v_2\|^2$ y $b = \langle v_1; v_2\rangle$, obtenemos

$$0 \leq \|v_2\|^4\|v_1\|^2 - \|v_2\|^2|\langle v_1, v_2\rangle|^2,$$

lo cual, si suponemos que $v_2 \neq 0$ (e.d. $|v_2|^2 \neq 0$), implica la desigualdad deseada. Ahora bien, remontando las igualdades, $|\langle v_1, v_2\rangle| = \|v_1\|\|v_2\|$ equivale a $\|av_1 - bv_2\|^2 = 0$, donde $a = \|v_2\|^2$ y $b = \langle v_1; v_2\rangle$.

3. Tomando $a = 1$ y $b = -1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|v_1 + v_2\|^2 &= \|v_1\|^2 + \left(\overline{\langle v_1; v_2\rangle} + \langle v_1; v_2\rangle\right) + \|v_2\|^2 \\ &= \|v_1\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\langle v_1; v_2\rangle) + \|v_2\|^2 \\ &\leq \|v_1\|^2 + 2|\langle v_1; v_2\rangle| + \|v_2\|^2 \end{aligned}$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz implica

$$\|v_1 + v_2\|^2 \leq \|v_1\|^2 + 2\|v_1\|\|v_2\| + \|v_2\|^2 = (\|v_1\| + \|v_2\|)^2$$

que es equivalente a la desigualdad afirmada. La igualdad se obtiene si y solo si $\mathrm{Re}\,(\langle v_1, v_2\rangle) = \langle v_1, v_2\rangle = \|v_1\|\|v_2\|$, lo cual equivale a $av_1 - bv_2 = 0$ donde $a = \|v_2\|$ y $b = \|v_1\|$ pues

$$\|av_1 - bv_2\|^2 = |a|^2\|v_1\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(a\overline{b}\langle v_1; v_2\rangle\right) + |b|^2\|v_2\|^2.$$

□

Definición 5.8. Sea V un espacio unitario y $S \subseteq V$. Decimos que S es *ortogonal* si $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ para todo $v_1, v_2 \in T$ tales que $v_1 \neq v_2$. Si además $\|v\| = 1$ para todo $v \in S$, decimos que S es *ortonormal*.

Observación 5.9. Note que $S = \{v_i\}_{i\in I}$ es ortonormal si y solo si

$$\langle v_i; v_j\rangle = \delta_{ij}.$$

para todo $i, j \in I$.

Propiedad 5.10. *Sea V un espacio unitario. Si $S \subset V$ es ortogonal, y $0 \notin S$, entonces S es linealmente independiente.*

Dem. El argumento es similar al de la demostración de Propiedad 4.9. □

Teorema 5.11 (Ortogonalización de Gram-Schmidt)**.** *Sea V un espacio unitario. Suponga que V tiene dimensión finita, entonces V tiene una base ortonormal. Más aún, si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, existe una base ortonormal $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de V tal que para $k = 1, \ldots, n$*

$$\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle.$$

Dem. El argumento es similar al de la demostración de Teorema 4.10. □

Propiedad 5.12. *Sea V un espacio unitario. Suponga que V tiene dimensión finita y $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de V, entonces para todo $v \in V$*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v; u_i \rangle u_i.$$

En particular, si $v_1, v_2 \in V$ son tales que

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} z_i u_i \qquad v_2 = \sum_{i=1}^{n} w_i u_i,$$

entonces

$$\langle v_1; v_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}.$$

Dem. Como $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es base, existen $a_1, \ldots, a_n \in K$ tal que $v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$. De esta forma, para $j = 1, \ldots, n$,

$$\langle v; u_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_j$$

(ver Observación 5.9). Finalmente,

$$\langle v_1; v_2 \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} z_i u_i, \sum_{j=1}^{n} w_j u_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} z_i \overline{w_j} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}.$$

□

Definición 5.13. Sean V un espacio unitario y $S \subseteq V$, el *conjunto ortogonal* a S está definido por

$$S^{\perp} = \{v \in V | \ \langle v, u \rangle = 0, \text{ para todo } u \in S\}$$

Propiedad 5.14. *Sean V un espacio unitario y $S \subseteq V$, entonces $S^{\perp} \leq V$.*

Dem. El argumento es similar al de la demostración de Propiedad 4.14. □

Teorema 5.15. *Sea V un espacio unitario. Suponga que V tiene dimensión finita y sea $U \leq V$, entonces*

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

Dem. El argumento es similar al de la demostración de Teorema 4.15. □

Definición 5.16. Sea V un espacio unitario. Suponga que V tiene dimensión finita y sea $U \leq V$. Llamamos a $U^{\perp}$ el *complemento ortogonal de* U. A la proyección

$$p_U^{\perp} : V \longrightarrow V$$

sobre U, definida por la descomposición $V = U \oplus U^{\perp}$ la llamamos *proyección ortogonal sobre* U.

Propiedad 5.17. *Sea V un espacio unitario. Suponga que V tiene dimensión finita y sea $U \leq V$. Tenemos para todo $v_1, v_2 \in V$*

$$\langle p_U^{\perp}(v_1); v_2 \rangle = \langle v_1; p_U^{\perp}(v_2) \rangle$$

Si $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es una base ortonormal de U entonces para todo $v \in V$

$$p_U^{\perp}(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle v; u_i \rangle u_i.$$

Dem. El argumento es similar al de la demostracción de Propiedad 4.18. □

5.2. Operador adjunto

Sea V un espacio unitario y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$ un operador.

Definición 5.18. Sea $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$, decimos que g es un *operador adjunto de* f si para todo $v_1, v_2 \in V$

$$\langle g(v_1); v_2 \rangle = \langle v_1; f(v_2) \rangle.$$

Decimos que f es *auto-adjunto* si f es un operador adjunto de f.

Observación 5.19. Note que si g es adjunto de f, entonces f es adjunto de g. De hecho

$$\langle f(v_1); v_2 \rangle = \overline{\langle v_2; f(v_1) \rangle} = \overline{\langle g(v_2); v_1 \rangle} = \langle v_1; g(v_2) \rangle$$

Definición 5.20. Sean I, J conjuntos y $A \in M_{I \times J}(\mathbb{C})$, definimos la *matriz adjunta* de A por $A^* \in M_{J \times I}(\mathbb{C})$ tal que

$$A^*(j, i) = \overline{A(i, j)}$$

para todo $(j, i) \in J \times I$. Es decir el valor en (j, i) de A^* es el conjugado del valor en (i, j) de A. Similarmente si $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, y $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$, definimos su adjunta por $A^* \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$ tal que

$$A^*(j, i) = \overline{A(i, j)}$$

Sea $A \in M_{I \times I}(K)$, o $A \in M_{n \times n}(K)$, decimos que A es *hermítica* si $A^* = A$.

Proposición 5.21. *Suponga que V tiene dimensión finita, entonces existe un único operador $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V)$ adjunto de f. Más aún, si $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de V, entonces*

$$\Big[g\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left(\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^*$$

Dem. Defina el operador $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V)$ por la imagen de la base $\mathcal{B}$:

$$g(u_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle u_j; f(u_i)\rangle u_i.$$

De esta forma

$$\langle g(u_j); u_i\rangle = \langle u_j; f(u_i)\rangle$$

y por Propiedad 5.12

$$\begin{aligned}
\langle g(v_1); v_2\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle g(v_1); u_i\rangle \overline{\langle v_2; u_i\rangle} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle v_1; u_j\rangle \langle g(u_j); u_i\rangle \overline{\langle v_2; u_i\rangle} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle v_1; u_j\rangle \langle u_j; f(u_i)\rangle \overline{\langle v_2; u_i\rangle} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle v_1; u_j\rangle \langle u_j; f(v_2)\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle v_1; u_j\rangle \overline{\langle f(v_2); u_j\rangle} \\
&= \langle v_1; f(v_2)\rangle
\end{aligned}$$

Por otro lado si, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V)$ es adjunto de f, por Propiedad 5.12,

$$\begin{aligned}
h(u_j) &= \sum_{i=1}^{n} \langle h(u_j); u_i\rangle u_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle u_j; f(u_i)\rangle u_i \\
&= g(u_j),
\end{aligned}$$

luego $h = g$.
Ahora, para ver que la representación matricial de g respecto a $\mathcal{B}$ es la adjunta

de la de f basta observar que

$$\begin{aligned}
\Big[g\Big]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B},(j,i)} &= \Big[g(u_i)\Big]^{\mathcal{B}}_{j} \\
&= \langle g(u_i); u_j\rangle \\
&= \langle u_i; f(u_j)\rangle \\
&= \overline{\langle f(u_j); u_i\rangle} \\
&= \overline{\Big[f(u_j)\Big]^{\mathcal{B}}_{i}} \\
&= \overline{\Big[f\Big]}^{T}_{\mathcal{B},(i,j)}
\end{aligned}$$

□

Notación 5.22. Si V tiene dimensión finita, a la adjunta de f la denotaremos por f^*.

Propiedad 5.23. *El mapa*

$$\begin{aligned}
h : V &\longrightarrow V^* \\
v &\longmapsto h_v = \langle \bullet; v\rangle : v' \mapsto \langle v'; v\rangle
\end{aligned}$$

es semilineal, *es decir para todo* $v_1, v_2, v \in V$ *y* $c \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
h(v_1 + v_2) &= h(v_1) + h(v_2) \\
h(cv) &= \overline{c}h(v),
\end{aligned}$$

e inyectivo. Si además V tiene dimensión finita, h es biyectivo.

Dem. Para todo $v' \in V$, dados $v_1, v_2, v \in V$ y $c \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
h(v_1 + v_2)(v') &= \langle v'; v_1 + v_2\rangle \\
&= \langle v'; v_1\rangle + \langle v'; v_2\rangle \\
&= h(v_1)(v') + h(v_2)(v') \\
&= (h(v_1) + h(v_2))\,(v), \ \text{y} \\
h(cv)(v') &= \langle v'; cv\rangle \\
&= \overline{c}\langle v'; v\rangle \\
&= \overline{c}h(v)(v')
\end{aligned}$$

Suponga ahora que $v_1, v_2 \in V$ son tales $h(v_1) = h(v_2)$, es decir $h(v_1 - v_2) = 0$, en particular $0 = h(v_1 - v_2)(v_1 - v_2) = \langle v_1 - v_2; v_1 - v_2\rangle = \|v_1 - v_2\|^2$, luego $v_1 - v_2 = 0$ y así$v_1 = v_2$, es decir $\imath$ es inyectiva. Finalmente suponga que V tiene dimensión finita y sea $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V, entonces $h(T) = \{h(u_1), \ldots, h(u_n)\}$ es la base de V^* dual de V, pues

$$h(u_j)(u_i) = \langle u_i; u_j\rangle = \delta_{ij}.$$

En particular dado $\lambda \in V^*$, si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ son tales que $\lambda = \sum_{i=1}^n a_i h(u_i)$ entonces $h(\sum_{i=1}^n \overline{a_i} u_i) = \lambda$, luego h es también sobreyectiva y así biyectiva. □

Observación 5.24. Note que si V tiene dimensión finita, para todo $v' \in V$,

$$\begin{aligned} f^*(h_v)(v') &= h_v\left(f(v')\right) \\ &= \langle f(v'); v\rangle \\ &= \langle v'; f^*(v)\rangle \\ &= h_{f^*(v)}(v') \end{aligned}$$

luego $f^*(h_v) = h_{f^*(v)}$, es decir

$$f^* \circ h = h \circ f^*,$$

donde, en esta igualdad, f^* a la izquierda es el dual de f, mientras que a la derecha es el adjunto. A través de la biyección semilineal h, ambos conceptos coinciden.

Observación 5.25. Note que si V tiene dimensión finita, $f^* \circ f$ es auto-adjunta, de hecho para todo $v_1, v_2 \in V$

$$\langle f^* \circ f(v_1); v_2\rangle = \langle f(v_1); f(v_2)\rangle = \langle v_1; f^* \circ f(v_2)\rangle$$

Proposición 5.26. *Si V tiene dimensión finita, las siguientes dos propiedades son equivalentes:*

1. *f es auto-adjunta; y,*
2. *la representación matricial de f respecto a una base ortonormal es hermítica.*

Dem. Proposición 5.21 implica que si f es auto-adjunta, su representación matricial respecto a una base ortogonal es hermítica. Para obtener el converso, tomamos una base ortonormal de V, $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y asumimos que $\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ es hermítica, es decir para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\langle f(u_j); u_i\rangle = \left[f\right]_{\mathcal{B},(i,j)}^{\mathcal{B}} = \overline{\left[f\right]_{\mathcal{B},(j,i)}^{\mathcal{B}}} = \overline{\langle f(u_i); u_j\rangle} = \langle u_j; f(u_i)\rangle,$$

luego si $v_1 = \sum_{i=1}^n z_i u_i$ y $v_2 = \sum_{j=1}^n w_j u_j$

$$\begin{aligned} \langle f(v_1); v_2\rangle &= \sum_{i,j=1}^n z_i \overline{w_j} \langle f(u_i); u_j\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n z_i \overline{w_j} \langle u_i; f(u_j)\rangle \\ &= \langle v_1; f(v_2)\rangle \end{aligned}$$

□

Observación 5.27. La descomposición de Jordan-Chevalley de los operadores auto-adjuntos sobre un espacio unitario empata con la descomposición sobre espacios euclideos pues tienen la particularidad de tener todos sus valores propios reales. Esto nos permitirá relajar las hipótesis del teorema espectral ya demostrado.

Lema 5.28. *Suponga que f es auto-adjunto, entonces*

1. *Para todo $P(t) \in \mathbb{R}[t]$, $P(f)$ es auto-adjunto;*
2. *si f es nilpotente, $f = 0$;*
3. *los valores propios de f son reales; y,*
4. *si $v_1, v_2 \in V$ son vectores propios asociados a valores propios distintos, entonces $\langle v_1; v_2 \rangle = 0$.*

Dem.

1. Note primero que para todo $v_1, v_2 \in V$, recursivamente establecemos que para $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,
$$\langle f^i(v_1); v_2 \rangle = \langle v_1; f^i(v_2) \rangle.$$
Ahora, si $P(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, para $k = 1, \ldots, n$ $a_k = \overline{a_k}$, y entonces para todo $v_1, v_2 \in V$
$$\begin{aligned} \langle P(f)(v_1); v_2 \rangle &= \langle \sum_{k=0}^{n} a_k f^k(v_1); v_2 \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \langle f^k(v_1); v_2 \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \langle v_1; f^k(v_2) \rangle \\ &= \langle v_1; \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} f^k(v_2) \rangle \\ &= \langle v_1; P(f)(v_2) \rangle. \end{aligned}$$

2. Sea $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ el grado de nilpotencia de f. Asuma por contradicción que $r > 1$, luego $r \geq 2$, y existe $v \in V$ tal que $f^{r-1}(v) \neq 0$; pero en tal caso
$$\|f^{r-1}(v)\|^2 = \langle f^{r-1}(v); f^{r-1}(v) \rangle = \langle f^r(v); f^{r-2}(v) \rangle = \langle 0; f^{r-2}(v) \rangle = 0$$
luego $f^{r-1}(v) = 0$, lo cual contradice la elección de v. Luego $r = 1$ y así $f = 0$.

3. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $v \in V$, $v \neq 0$, tales que $f(v) = \lambda v$. Así
$$\lambda \langle v; v \rangle = \langle \lambda v; v \rangle = \langle f(v); v \rangle = \langle v; f(v) \rangle = \langle v; \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle v; v \rangle,$$
de donde $(\lambda - \overline{\lambda})\|v\|^2 = 0$, pero $v \neq 0$, entonces, $\lambda = \overline{\lambda}$, es decir $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, tales que $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ y $f(v_2) = \lambda_2 v_2$. Así

$$\lambda_1 \langle v_1; v_2\rangle = \langle \lambda_1 v_1; v_2\rangle = \langle f(v_1); v_2\rangle = \langle v_1; f(v_2)\rangle = \langle v_1; \lambda_2 v_2\rangle = \lambda_2\langle v_1; v_2\rangle,$$

luego

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1; v_2\rangle = 0,$$

pero como $\lambda_1 - \lambda_2 =\neq 0$, $\langle v_1; v_2\rangle = 0$. □

Teorema 5.29 (Teorema Espectral)**.** *Suponga que V tiene dimensión finita y f es auto-adjunta entonces existe una base ortonormal $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de V tal que $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ es diagonal.*

Dem. Como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado,

$$P_f(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \ldots (t - \lambda_r)^{m_r}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}.$$

Como $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ son valores propios, por el lema son valores reales y $P_f(t) \in \mathbb{R}[t]$. En particular, como $t - \lambda_1, t - \lambda_2, \ldots, t - \lambda_r \in \mathbb{R}[t]$, por la demostración de Teorema 2.53 existen $P_D(t), P_N(t) \in \mathbb{R}[t]$, tales que si $f_D = P_D(f)$ y $f_N = P_N(f)$ entonces $f = f_D + f_N$ es la descomposición de Jordan-Chevalley, es decir f_D es diagonalizable y f_N nilpontente y estas conmutan. Ahora, por el lema, f_N es auto-adjunta y así, como es nilpotente, $f_N = 0$. Luego $f = f_D$ es diagonalizable. Para $i = 1, \ldots, r$, denote V_i el espacio generado por los vectores propios de f asociados a λ_i, es decir

$$V_i = \{v \in V |\ f(v) = \lambda_i v\},$$

de forma que, como f es diagonalizable,

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r.$$

Por el lema también sabemos que si $v_i \in V_i$ y $v_j \in V_j$, $i \neq j$, tenemos $\langle v_i, v_j\rangle = 0$, luego si $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r$ son respectivamente bases ortonormales de $V_1, \ldots, V_r$,

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_r$$

es una base ortonormal de V formada por vectores propios de f, en particular, $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ es diagonal. □

Corolario 5.30. *Sea V un espacio euclídeo de dimensión finita y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ un operador auto-adjunto, entonces una base ortonormal $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de V tal que $\Big[f\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ es diagonal.*

Dem. Sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V y $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ la representación de f respecto a la base $\mathcal{B}$ donde $n = \dim(V)$. Entonces A es una matriz simétrica con entradas reales. Sea

$$\begin{array}{rcl} f_A : \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ (z_1, \ldots, z_n) & \longmapsto & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{1k} z_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_{nk} z_k\right) \end{array}$$

donde la kl-ésima entrada de es $A(k,l) = a_{kl}$. De forma que la representación matricial de f_A respecto a la base canónica de $\mathbb{C}^n$ es A, la cual es hermítica pues es simétrica con entradas reales, luego f_A es auto-adjunta respecto al producto hermítico

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}.$$

Así

$$P_f(t) = P_{f_A}(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2} \dots (t-\lambda_r)^{m_r}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}.$$

y la conclusión se sigue ahora de Teorema 4.33. □

5.3. Operadores unitarios

Sea V un espacio unitario y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V)$ un operador.

Definición 5.31. Decimos que f es un *operador unitario* si para todo $v_1, v_2 \in V$

$$\langle f(v_1); f(v_2) \rangle = \langle v_1; v_2 \rangle.$$

Observación 5.32. Tenemos

$$\begin{aligned}
\|v_1 + v_2\|^2 &= \langle v_1 + v_2; v_1 + v_2 \rangle \\
&= \langle v_1; v_1 \rangle + \langle v_2; v_1 \rangle + \langle v_1; v_2 \rangle + \langle v_2; v_2 \rangle \\
&= \langle v_1; v_1 \rangle + \overline{\langle v_1; v_2 \rangle} + \langle v_1; v_2 \rangle + \langle v_2; v_2 \rangle \\
&= \|v_1\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\langle v_1; v_2 \rangle) + \|v_2\|^2, \text{ y} \\
\|v_1 + iv_2\|^2 &= \langle v_1 + iv_2; v_1 + iv_2 \rangle \\
&= \langle v_1; v_1 \rangle + i\langle v_2; v_1 \rangle - i\langle v_1; v_2 \rangle + \langle v_2; v_2 \rangle \\
&= \langle v_1; v_1 \rangle - i\Big(\langle v_1; v_2 \rangle - \overline{\langle v_1; v_2 \rangle}\Big) + \langle v_2; v_2 \rangle \\
&= \|v_1\|^2 + 2\,\mathrm{Im}\,(\langle v_1; v_2 \rangle) + \|v_2\|^2,
\end{aligned}$$

de forma que el producto interno se puede expresar en términos de la norma:

$$\langle v_1; v_2 \rangle = \frac{\|v_1 + v_2\|^2 - \big(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2\big)}{2} + \frac{\|v_1 + iv_2\|^2 - \big(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2\big)}{2} i.$$

De esto podemos concluir que f es unitario si y solo f preserva la norma, es decir $\|f(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in V$.

Proposición 5.33. *Si V tiene dimensión finita, las siguiente propiedades son equivalentes*

1. *f es unitario;*
2. *f preserva la norma;*

3. *$f^* \circ f = \mathrm{id}_V$; y,*

4. *la imagen por f de una base ortonormal es una base ortonormal.*

Dem. El argumento es similar al de la demostración de Proposición 4.37 $\square$

Observación 5.34. Como en el caso de los operadores ortogonales sobre espacios euclídeos, los operadores unitarios son invertibles y envían bases ortogonales en bases ortogonales.

Definición 5.35. Decimos que $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ es una *matriz unitaria* si

$$A^*A = I_n$$

donde I_n denota la matriz con unos en la diagonal y ceros en el resto de entradas.

Proposición 5.36. *Si V tiene dimensión finita y $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de V, f es unitario si y solo si $\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ es unitaria.*

Dem. La proposición se sigue del hecho que si $A = \left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, entonces $A^* = \left[f^*\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ y

$$A^*A = \left[f^*\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left[f^* \circ f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}.$$

Entonces $A^*A = I_n$ si y solo si $f^* \circ f = \mathrm{id}_V$. $\square$

Teorema 5.37. *Si V tiene dimensión finita igual a n, la colección de operadores unitarios de V está en correspondencia biyectiva con la colección de n-tuplas $(v_1, \ldots, v_n) \in V \times \ldots \times V$ tales que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal de V.*

Dem. El argumento es similar al de la demostración de Teorema 4.41. $\square$

5.4. Estructura compleja

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Propiedad 5.38. *Suponga que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ es un operador simple, entonces: o bien,*

1. *$f = c\,\mathrm{id}_V$, para algún $c \in \mathbb{R}$ y en tal caso $\dim(V) = 1$; o bien,*

2. *$f = a\,\mathrm{id}_V + bj$, donde $j \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ es tal que $j^2 = -\mathrm{id}_V$, $a, b \in \mathbb{R}$, y en tal caso $\dim(V) = R^2$.*

Dem. Como f es simple, su polinomio minimal es irreducible, en particular este es de la forma $t - c$, con $c \in \mathbb{R}$, ó $(t - a)^2 + b^2$, con $a, b \in \mathbb{R}$. En el primer caso

$f - c\,\mathrm{id}_V = 0$, es decir $f = c\,\mathrm{id}_V$; en el segundo, $(f - a\,\mathrm{id}_V)^2 + b^2\,\mathrm{id}_V = 0$, y si $j = \frac{1}{b}(f - a\,\mathrm{id}_V)$, tenemos $f = a\,\mathrm{id}_V + bj$ con

$$\begin{aligned} j^2 &= \left(\frac{1}{b}(f - a\,\mathrm{id}_V)\right) \circ \left(\frac{1}{b}(f - a\,\mathrm{id}_V)\right) \\ &= \frac{1}{b^2}\left(f - a\,\mathrm{id}_V\right)^2 \\ &= \frac{1}{b^2}\left(-b^2\,\mathrm{id}_V\right) = -\,\mathrm{id}_V\,. \end{aligned}$$

Como f es simple, en el primer caso, dado $v \in V$, $v \neq 0$, $\langle v\rangle$ es invariante bajo f y así $V = \langle v\rangle$; en el segundo, dado $v \in V$, $v \neq 0$, $\{v, j(v)\}$ es linealmente independiente pues si

$$\alpha v + \beta j(v) = 0,$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces operando por j,

$$-\beta v + \alpha j(v) = 0;$$

combinando las dos relaciones obtenemos

$$0 = \alpha\left(\alpha v + \beta j(v)\right) - \beta\left(-\beta v + \alpha j(v)\right) = (\alpha^2 + \beta^2)v$$

pero $v \neq 0$, luego $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, de donde $\alpha = \beta = 0$; ahora $\langle v, j(v)\rangle$ es invariante bajo f, así $V = \langle v, j(v)\rangle$. $\square$

Observación 5.39. Considere $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, con la base $\mathcal{B} = \{1, i\}$ (en particular $\mathbb{C} \simeq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$). Dado $a + bi \in \mathbb{C}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, la función:

$$\begin{aligned} m_{a+bi} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longrightarrow (a + bi)z \end{aligned}$$

es un operador en $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, de hecho para todo $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $c \in \mathbb{R}$

$$(a + bi)\left(z_1 + z_2\right) = (a + bi)z_1 + (a + bi)z_2, (a + bi)cz = c(a + bi)z.$$

Tenemos entonces que si $f = m_{a+ib}$, entonces

$$\left[f\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

y $f = a\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}} + bj$ donde $j = m_i$. Note que

$$\left[j\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observación 5.40. La observación anterior se puede generalizar a $\mathbb{C}^n$ el cual visto como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ tiene dimensión $2n$. Tome la base

$$\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$$

donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$, visto como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, y, $f_1 = ie_i, \ldots, f_n = ie_n$. Tome $j \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ definida por

$$\begin{array}{rcl} j : \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ (z_1, \ldots, z_n) & \longmapsto & i(z_1, \ldots, z_n). \end{array}$$

Entonces $j^2 = -\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ y

$$\left[j\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

donde 0 denota el origen de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $I_n \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es la matriz con unos en la diagonal y ceros en el resto de entradas.

Definición 5.41. Una *estructura compleja* en V es un operador $j \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ tal que $j^2 = -\mathrm{id}_V$.

Propiedad 5.42. *Suponga que V tiene dimensión finita. Si V admite una estructura compleja j, entonces la dimensión de V es par. En tal caso V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ mediante el producto por escalar definido por*

$$(a + bi)v = (a\,\mathrm{id}_V + bj)\,(v)$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $v \in V$. Más aún, existe una base de la forma $T = \{v_1, \ldots, v_n, j(v_1), \ldots, j(v_n)\}$ donde $2n = \dim(V)$. En particular

$$\left[j\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

Dem. Si m es la dimensión de V entonces

$$0 \leq (\det(j))^2 = \det\left(j^2\right) = \det(-\mathrm{id}_V) = (-1)^m$$

luego m es par, es decir $m = 2n$ para algún $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Para verificar que bajo la multiplicación por escalar definida V es un espacio vectorial bajo $\mathbb{C}$ basta verificar que esta es unitaria, asociativa y que es distributiva. Lo cual se sigue de las siguientes igualdades

$$\begin{array}{rcl}
1v & = & \mathrm{id}_V(v) = v \\
(a+bi)\left((c+di)v\right) & = & (a\,\mathrm{id}_V + bj) \circ (c\,\mathrm{id}_V + dj)\,(v) \\
 & = & \left(ac\,\mathrm{id}_V + adj + bcj + bdj^2\right)(v) \\
 & = & \left((ac - bd)\,\mathrm{id}_V + (ad + bc)j\right)(v) \\
 & = & \left((a+bi)(c+di)\right)v \\
(a+bi)(v+w) & = & (a\,\mathrm{id}_V + bj)\,(v+w) \\
 & = & (a\,\mathrm{id}_V + bj)\,(v) + (a\,\mathrm{id}_V + bj)\,(w) \\
 & = & (a+bi)v + (a+bi)w \\
\left((a+bi) + (c+di)\right)v & = & \left((a+c)\,\mathrm{id}_V + (b+d)j\right)v \\
 & = & (a\,\mathrm{id}_V + bj + c\,\mathrm{id}_V + dj)\,v \\
 & = & (a\,\mathrm{id}_V + bj)\,(v) + (c\,\mathrm{id}_V + dj)\,(v) \\
 & = & (a+bi)v + (c+di)v
\end{array}$$

validas para todo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $v, w \in V$.
Sea $\{v_1, \ldots, v_{n'}\}$ una base de V como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, donde n' es su dimensión. Entonces V es generado como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, por $\{v_1, \ldots, v_{n'}, j(v_1), \ldots, j(v_{n'})\}$ pues

$$\sum_{k=1}^{n'} z_k v_k = \sum_{k=1}^{n'} a_k v_k + b_k j(v_k),$$

donde para $k = 1, \ldots, n'$, $z_k = a_k + b_k i$ con $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Más este conjunto de generadores es linealmente independiente pues si $a_1, \ldots, a_{n'}, b_1, \ldots, b_{n'} \in \mathbb{R}$ son tales que $\sum_{k=1}^{n'} a_k v_k + b_k j(v_k) = 0$, entonces $\sum_{k=1}^{n'} z_k v_k = 0$, con $z_k = a_k + b_k i$; luego todo $z_k = 0$ y así todo $a_k = b_k = 0$. Tenemos $2n' = 2n$ y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n, j(v_1), \ldots, j(v_n)\}$ es una base de V como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. $\square$

Propiedad 5.43. *Sean j una estructura compleja en V y $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$. Entonces, tomando V como un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ mediante el producto por escalar definido por $(a + bi)v = (a \operatorname{id}_V + bj)(v)$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $v \in V$, tenemos $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$ si y solo si $f \circ j = j \circ f$, o, equivalentemente, $-j \circ f \circ j = f$.*

Dem. Suponga que $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$, entonces para todo $v \in V$

$$f \circ j(v) = f(iv) = if(v) = j \circ f(v).$$

Recíprocamente, si $f \circ j = j \circ f$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $v \in V$,

$$\begin{aligned} f((a + bi)v) &= f \circ (a \operatorname{id}_V + bj)(v) \\ &= (af + bf \circ j)(v) \\ &= (af + bj \circ f)(v) \\ &= (a \operatorname{id}_V + bj) \circ f(v) \\ &= (a + bi)f(v) \end{aligned}$$

luego $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$. Finalmente componemos ambos lados de la igualdad $f \circ j = j \circ f$ por $-j = j^{-1}$ para obtener $-j \circ f \circ j = f$. $\square$

Teorema 5.44. *Suponga que V tiene dimensión finita igual a $2n$ y sea $j \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ el operador que corresponde a multiplicación por i. Entonces cada estructura complejas en V es de la forma*

$$j_f = f \circ j \circ f^{-1}$$

para algún isomorfismos $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, V)$. Más aún $j_f = j_g$ si y solo si $g^{-1} \circ f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$.

Dem. Dado un isomorfismo $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, V)$, el operador

$$j_f = f \circ j \circ f^{-1} \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$$

es una estructura compleja (ver Figura 5.1), pues

$$\begin{aligned} j_f^2 &= f \circ j \circ f^{-1} \circ f \circ j \circ f^{-1} \\ &= f \circ j^2 \circ f^{-1} \\ &= f \circ -\operatorname{id}_{\mathbb{C}^n} \circ f^{-1} \\ &= -f \circ f^{-1} \\ &= -\operatorname{id}_V . \end{aligned}$$

Recíprocamente, dada una estructura compleja j_V en V, usando la notación en

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"] & V \arrow[d, dashed, "j_f"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "f"] & V \end{tikzcd}$$

Figura 5.1: Estructura compleja

Observación 5.40, Propiedad 5.42 implica que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^n &\longrightarrow V \\ e_k &\longmapsto v_k \\ f_k &\longmapsto j_V(v_k) \end{aligned}$$

donde $\{v_1, \ldots, v_n, j_V(v_1), \ldots, j_V(v_n)\}$ es una base de V, es un isomorfismo de espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ tal que $j_f = j_V$. Finalmente, suponga que $f, g \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, V)$ son isomorfismos tales que $j_f = j_g$, es decir

$$f \circ j \circ f^{-1} = g \circ j \circ g^{-1}.$$

Entonces, como $(g^{-1} \circ f) \circ j = j \circ (g^{-1} \circ f)$, por Propiedad 5.43 tenemos que $g^{-1} \circ f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$. □

Propiedad 5.45. *Suponga que V es un espacio euclideo con producto interno denotado por $\langle \bullet, \bullet \rangle$ y j es una estructura compleja en V. Entonces, tomando V como un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ mediante el producto por escalar definido por $(a + bi)v = (a \operatorname{id}_V + bj)(v)$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $v \in V$,*

$$\begin{aligned} \langle \bullet ; \bullet \rangle_j : V \times V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (v_1, v_2) &\longmapsto \langle v_1 ; v_2 \rangle + \langle v_1 ; j(v_2) \rangle i \end{aligned}$$

es un producto de hermítico sobre V si y solo si j es ortogonal.

Dem. Suponga primero que j es ortogonal. Entonces $j^* = j^{-1} = -j$. Note que $\langle \bullet, \bullet \rangle_f$ es sesquilineal y además hermítica pues

$$\begin{aligned}
\langle v_2; v_1 \rangle_j &= \langle v_2; v_1 \rangle + \langle v_2; j(v_1) \rangle i \\
&= \langle v_2; v_1 \rangle - \langle j(v_2); v_1 \rangle i \\
&= \langle v_1; v_2 \rangle - \langle v_1; j(v_2) \rangle i \\
&= \overline{\langle v_1; v_2 \rangle_j}.
\end{aligned}$$

Ahora, dado $v \in V$,

$$\langle v; j(v) \rangle = -\langle j(v); v \rangle = -\langle v; j(v) \rangle$$

luego $\langle v; j(v) \rangle = 0$. Si además $v \neq 0$,

$$\langle v; v \rangle_j = \langle v; v \rangle + \langle v; j(v) \rangle i = \langle v; v \rangle > 0$$

luego $\langle \bullet; \bullet \rangle_f$ es definitivamente positiva y así es un producto hermítico.
Recíprocamente suponga que $\langle \bullet; \bullet \rangle_f$ es producto hermítico, entonces para todo $v_1, v_2 \in V$

$$\begin{aligned}
\langle j(v_1); j(v_2) \rangle &= \operatorname{Re}\left(\langle j(v_1); j(v_2) \rangle_j \right) \\
&= \left(\langle j(v_1); j(v_2) \rangle_j + \langle j(v_2); j(v_1) \rangle_j \right)/2 \\
&= \left(\langle iv_1; iv_2 \rangle_j + \langle iv_2; iv_1 \rangle_j \right)/2 \\
&= \left(\langle v_1; v_2 \rangle_j + \langle v_2; v_1 \rangle_j \right)/2 \\
&= \operatorname{Re}\left(\langle v_1; v_2 \rangle_j \right) \\
&= \langle v_1; v_2 \rangle
\end{aligned}$$

luego j es ortogonal. □

Observación 5.46. Note que la norma definida por $\langle \bullet; \bullet \rangle$ y por $\langle \bullet; \bullet \rangle_j$ coinciden.

Propiedad 5.47. *Suponga que V es un espacio euclideo con producto interno denotado por $\langle \bullet; \bullet \rangle$, j es una estructura compleja ortogonal en V y $f \in$* $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$. *Entonces, tomando V como un espacio unitario mediante el producto por escalar definido por $(a + bi)v = (a \operatorname{id}_V + bj)(v)$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $v \in V$, y el producto hermítico*

$$\langle \bullet; \bullet \rangle_j = \langle \bullet; \bullet \rangle + \langle \bullet; j(\bullet) \rangle i,$$

tenemos f es unitario si y solo si $f \circ j = j \circ f$ y f es ortonormal.

Dem. Suponga primero que f es unitaria, entonces $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$ y así $f \circ j = j \circ f$; además para todo $v \in V$

$$\|j(v)\|^2 = \langle j(v); j(v) \rangle = \langle j(v); j(v) \rangle_j = \langle v; v \rangle_j = \langle v; v \rangle = \|v\|^2$$

luego f es ortonormal. Recíprocamente, si $f \circ j = j \circ f$ y f es ortogonal, para todo $v_1, v_2 \in V$,

$$\begin{aligned} \langle f(v_1); f(v_2)\rangle_j &= \langle f(v_1); f(v_2)\rangle + \langle f(v_1); j \circ f(v_2)\rangle i \\ &= \langle f(v_1); f(v_2)\rangle + \langle f(v_1); f \circ j(v_2)\rangle i \\ &= \langle v_1; v_2\rangle + \langle v_1; j(v_2)\rangle i \\ &= \langle v_1; v_2\rangle_j, \end{aligned}$$

es decir, f es unitaria. $\square$

Observación 5.48. Bajo las hipótesis de la propiedad, suponga además que V tiene dimensión finita. Si f es unitaria, entonces

$$j = f^* \circ j \circ f$$

pues, como f es ortogonal, $f^* = f^{-1}$ y, como $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$, $f \circ j = j \circ f$, así $f^* \circ j \circ f = f^{-1} \circ f \circ j = j$. Recíprocamente, suponga que $j = f^* \circ j \circ f$, entonces para todo $v_1, v_2 \in V$

$$\begin{aligned} \langle f(v_1), j \circ f(v_2)\rangle &= \langle v_1, f^* \circ j \circ f(v_2)\rangle \\ &= \langle v_1, j(v_2)\rangle \end{aligned}$$

luego f preserva la parte imaginaria del producto hermítico $\langle \bullet; \bullet\rangle_j$. Si ademas f es ortogonal, f preserva la parte real y como en tal caso $f^* = f^{-1}$,

$$f \circ j = f \circ f^* \circ j \circ f = j \circ f,$$

luego $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$ y f es unitaria. Por otro lado si f conmuta con j, entonces $j = f^* \circ j \circ f = f^* \circ f \circ j$ y así $\mathrm{id}_V = f^* \circ f$, es decir f es ortogonal y a su vez f es entonces unitaria.
El hecho que $j = f^* \circ j \circ f$ sea equivalente a que f preserve la parte imaginaria del producto hermítico, $\langle \bullet; j(\bullet)\rangle$, es la motivación para el contenido del próximo capitulo donde entraremos a estudiar este tipo de estructuras que se llaman espacios simplécticos, las cuales generalizan está intersección entre espacios ortogonales, espacios unitarios y estructuras complejas.

Capítulo 6

Espacios simplécticos

Sea K un cuerpo y V un espacio vectorial sobre K.

6.1. Forma simpléctica

Definición 6.1. Una *forma simpléctica* en V es una función

$$\begin{array}{rcl} \sigma : V \times V & \longrightarrow & K \\ (v_1, v_2) & \longmapsto & \sigma(v_1, v_2) \end{array}$$

tal que:

1. *es bilineal*: para todo $v, v_1, v_2 \in V$ y $c \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{rcl} \sigma(v_1 + v_2, v) & = & \sigma(v_1, v) + \sigma(v_2, v) \\ \sigma(cv_1, v_2) & = & c\sigma(v_1, v_2) \\ \sigma(v, v_1 + v_2) & = & \sigma(v, v_1) + \sigma(v, v_2) \\ \sigma(v_1, cv_2) & = & c\sigma(v_1, v_2); \end{array}$$

2. *es alternante*: para todo $v \in V$

$$\sigma(v, v) = 0;$$

3. *es no-degenerada* Si $v \in V$ es tal que $\sigma(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ entonces $v = 0$.

Un *espacio simpléctico* es un espacio vectorial provisto de una forma simpléctica.

Observación 6.2. Para todo $v_1, v_2 \in V$,

$$\sigma(v_2, v_1) = -\sigma(v_1, v_2).$$

De hecho, la condición alternante implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma(v_1+v_2, v_1+v_2) \\ &= \sigma(v_1,v_1)+\sigma(v_1,v_2)+\sigma(v_2,v_1)+\sigma(v_2,v_2) \\ &= \sigma(v_1,v_2)+\sigma(v_2,v_1) \end{aligned}$$

Ejemplo 6.3.

1. Sobre $V = K^{2n} = K^n \times K^n$

$$\sigma\left((\overline{q},\overline{p}),(\overline{q}',\overline{p}')\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i' - p_i' q_i$$

   donde $\overline{q} = (q_1,\ldots,q_n), \overline{p} = (p_1,\ldots,p_n), \overline{q}' = (q_1',\ldots,q_n')$ y $\overline{p}' = (p_1',\ldots,p_n')$.

2. Sobre $V \times V^*$

$$\sigma\left((v,\lambda),(w,\mu)\right) = \lambda(w) - \mu(v)$$

   donde $v, w \in V$ y $\lambda, \mu \in V^*$.

3. Suponga que $K = \mathbb{R}$ y V es un espacio euclídeo con una estructura compleja ortogonal j. Sobre V

$$\sigma(v_1,v_2) = \langle v_1, j(v_2)\rangle$$

Observación 6.4. Una forma simpléctica σ, al ser bilineal, induce una transformación lineal

$$\begin{aligned} s: V &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto s_v = \sigma(v,\bullet): w \mapsto \sigma(v,w). \end{aligned}$$

El hecho que σ sea no-degenerada implica que s es inyectiva; y es un isomorfismo si V tiene dimensión finita. Pues, la condición de que σ sea no degenerada quiere decir que $s_v = 0$ si y solo si $v = 0$.
Con este mapa, tenemos

$$s(v)(w) = s_v(w) = \sigma(v,w)$$

En particular s es una transformación lineal $V \to V^*$ y su dual s^* es una transformación lineal $(V^*)^* \to V^*$.

Proposición 6.5. *Sea V un espacio simpléctico de dimensión finita y*

$$\begin{aligned} \widehat{\bullet}: V &\longrightarrow (V^*)^* \\ v &\longmapsto \widehat{v}: \lambda \mapsto \lambda(v). \end{aligned}$$

el isomorfismo canónico. Entonces para todo $v \in V$

$$s^*(\widehat{v}) = -s(v)$$

Dem. Para todo $w \in V$

$$\begin{aligned} s^*(\widehat{v})(w) &= \widehat{v}(s(w)) \\ &= s(w)(v) \\ &= \sigma(w,v) \\ &= -\sigma(v,w) \\ &= -s(v)(w). \end{aligned}$$

□

Propiedad 6.6. *Si V es un espacio simpléctico y tiene dimensión finita, entonces su dimensión es par.*

Dem. Sea $T = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de V y $T^* = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ la base de V^* dual de T. Tomamos la imagen de T mediante el isomorfismo canónico $V \mapsto (V^*)^*$, la cual es la base $\widehat{T} = \{\widehat{v_1}, \ldots, \widehat{v_m}\}$ de $(V^*)^*$ dual de T^*. La proposición anterior implica que si tomamos las representaciones matriciales en $M_{m\times m}(K)$

$$A = \Big[s\Big]_T^{T^*}, \text{ y } B = \Big[s^*(\widehat{\bullet})\Big]_T^{T^*} = \Big[s^*\Big]_{\widehat{T}}^{T^*}\Big[\widehat{\bullet}\Big]_T^{\widehat{T}} = \Big[s^*\Big]_{\widehat{T}}^{T^*},$$

entonces $B = -A$, pero por otro lado $B = A^\intercal$, luego $A^\intercal = -A$. De donde

$$\det(A) = \det(A^\intercal) = \det(-A) = (-1)^m \det(A).$$

Ahora como $\sigma : V \to V^*$ es inyectiva, $\det(A) \neq 0$ y así $1 = (-1)^m$, en particular $m = 2n$ para algún $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. □

Definición 6.7. Sean V un espacio simpléctico y $S \subseteq V$, el *conjunto σ-ortogonal a S* está definido por

$$S^\sigma = \{v \in V|\ \sigma(w,v) = 0, \text{ para todo } w \in S\}$$

Observación 6.8. Note que $S^\sigma = (s(S))_0$. De hecho

$$\begin{aligned} S^\sigma &= \{v \in V|\ \sigma(w,v) = 0, \text{ para todo } w \in S\} \\ &= \{v \in V|\ s(w)(v) = 0, \text{ para todo } w \in S\} \\ &= \{v \in V|\ \lambda(v) = 0, \text{ para todo } \lambda \in s(S)\} \\ &= (s(S))_0 \end{aligned}$$

Esto implica la siguiente propiedad.

Propiedad 6.9. *Sean V un espacio simpléctico y $S \subseteq V$, entonces $S^\sigma \leq V$. Si $S' \subseteq S$ entonces $S^\sigma \leq S'^\sigma$. Si V tiene dimensión finita y $U \leq V$ entonces*

$$\dim(U) + \dim(U^\sigma) = \dim(V)$$

6.2. Subespacios isotrópicos y bases de Darboux

Sea V un espacio simpléctico sobre K.

Definición 6.10. Sea $U \leq V$, entonces decimos que

1. U es un *subespacio simpléctico* si la restricción de σ a $U \times U$ es una forma simpléctica;
2. U es un *subespacio isotrópico* si $U \leq U^\sigma$;
3. U es un *subespacio lagrangiano* si $U = U^\sigma$;

Observación 6.11. Suponga que V tiene dimensión finita. Si $U \leq V$ es un subespacio lagrangiano y $\dim(V) = 2n$ entonces $\dim(U) = n$, de hecho como $U = U^\sigma$,

$$2n = \dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\sigma) = 2\dim(U).$$

Ejemplo 6.12. 1. En el espacio simpléctico de Ejemplo 6.3.1, $V = K^n \times K^n$, denote, para $i = 1, \ldots, n$, e_i el elemento cuya i-ésima entrada es 1 y el resto ceros, y f_i el elemento cuya $n+i$-ésima entrada es 1 y el resto ceros. Note que para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sigma(e_i, f_j) = -\delta_{ij} \quad \sigma(e_i, e_j) = \sigma(f_i, f_j) = 0.$$

Entonces para cualquier subconjunto de indices $J \subset I = \{1, \ldots, n\}$,

$$V_J = \mathrm{Sp}\left(\{e_j, f_j\}_{j\in J}\right)$$

es un subespacio simpléctico,

$$E_J = \mathrm{Sp}\left(\{e_j\}_{j\in J}\right), \text{ y } F_J = \mathrm{Sp}\left(\{f_j\}_{j\in J}\right)$$

son isotrópicos, y si $J = I$, E_I y F_I son subespacios lagrangianos.

2. En el espacio simpléctico de Ejemplo 6.3.2, $V \times V^*$, sea $\{v_i\}_{i\in I}$ una base de V y $\{\lambda_i\}_{i\in I'}$ una base de V^* donde $I \subseteq I'$ y $\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in I$. Note que para todo $i, j \in I$

$$\sigma\left((v_i, 0), (0, \lambda_j)\right) = -\delta_{ij} \quad \sigma\left((v_i, 0), (v_j, 0)\right) = 0$$

y para todo $i, j \in I'$

$$\sigma\left((0, f_i), (0, f_j)\right) = 0.$$

Entonces para cualquier subconjunto de indices $J \subset I$,

$$(V \times V^*)_J = \mathrm{Sp}\left(\{(v_j, 0), (0, \lambda_j)\}_{j\in J}\right)$$

es un subespacio simpléctico,

$$E_J = \mathrm{Sp}\left(\{(v_j, 0)\}_{j\in J}\right), \text{ y } F_J = \mathrm{Sp}\left(\{(0, \lambda_j)\}_{j\in J}\right)$$

son isotrópicos, y si $J = I$, E_I y F_I son subespacios lagrangianos.

Proposición 6.13. *Sea $U \leq V$, entonces*

1. *U es un subespacio simpléctico si y solo si la restricción de s a U es inyectiva. En particular, U es un subesapcio simpléctico si y solo si $U \cap U^\sigma = \{0\}$.*

2. *U es un subespacio isotrópico si y solo si $\sigma(u, u') = 0$ para todo $u, u' \in U$ (es decir $s(U) = 0$).*

3. *U es un subespacio lagrangiano si y solo si U es un subespacio isotrópico maximal.*

Dem.

1. Si U es subespacio simpléctico, entonces la restricción de σ a $U \times U$ es no-degenerada, en particular dado $u \in U$, $u \neq 0$, existe $w \in U$ tal que $\sigma(u, w) \neq 0$. Así pues la imagen en U^*, $s(u)$, es diferente de 0 pues $s(u)(w) \neq 0$. Es decir el núcleo de s restringido a U es $\{0\}$, luego es inyectiva. Reciprocamente, si la restricción s a U es inyectiva, la restricción de σ a $U \times U$ es bilineal, alternante y no-degenerada, luego U es un subespacio simplectico. Para establecer la segunda afirmación basta con observar que $u \in U \cap U^\sigma$ si y solo si $s(u)(w) = 0$ para todo $w \in U$, es decir si y solo si u pertenece al núcleo de la restricción de s a U.

2. Suponga que U es isotrópico, luego para todo $u, u' \in U$, como $U \leq U^\sigma$, $u' \in U^\sigma$ y $\sigma(u, u') = 0$. Reciprocamente, si $\sigma(u, u') = 0$ para todo $u, u' \in U$, entonces $U \leq U^\sigma$.

3. Suponga que U es un subespacio lagrangiano, entonces U es isotrópico. Suponga que existe $U' \leq V$ isotrópico tal que $U \leq U'$. Sea $u' \in U'$, entonces $\sigma(u, u') = 0$ para todo $u \in U$, en particular $u' \in U^\sigma = U$. Luego $U' = U$. Recíprocamente, si U es isotrópico máximal, dado $u' \in U^\sigma$,
$$\sigma(u_1 + au', u_2 + bu') = \sigma(u_1, u_2) + b\sigma(u_1, u') + a\sigma(u', u_2) + \sigma(u', u') = 0,$$
luego $U + \mathrm{Sp}(\{u'\})$ es isotrópico y así $u' \in U$. Luego $U = U^\sigma$. □

Propiedad 6.14. *Suponga que V tiene dimensión finita y sea $U_0 \leq V$ un subespacio isotrópico. Entonces existe un subespacio lagrangiano $U \leq V$ que contiene a U_0.*

Dem. Tenemos $U_0 \leq U_0^\sigma$. Si $U_0 = U_0^\sigma$, entonces $U = U_0$ es un subespacio lagrangiano, de lo contrario existe $u \in U_0^\sigma \setminus U_0$. Entonces, $u \neq 0$ y para todo $u_1 + au, u_2 + bu \in U' = U_0 + \mathrm{Sp}(\{u\})$, $u_1, u_2 \in U$ y $a, b \in K$,
$$\sigma(u_1 + au, u_2 + bu) = \sigma(u_1, u_2) + b\sigma(u_1, u) + a\sigma(u, u_2) + \sigma(u, u) = 0,$$
luego U' es isotrópico y
$$U_0 < U' \leq U'^\sigma < U_0^\sigma.$$
Reemplazamos U_0 por U' y continuamos recursivamente. Por monotonia de la dimensión, como V tiene dimensión finita, eventualmente obtenemos $U = U'$ subespacio lagrangiano. □

Observación 6.15 (Extensión de subespacios isotrópicos a lagrangianos en dimensión infinita)**.** El mismo resultado de la proposición anterior, se puede generalizar a espacios simplécticos de dimensión infinita usando Lema de Zorn. De hecho, dado $U_0 \leq V$ subespacio isotrópico, consideramos la colección P de subespacios isotrópicos que contienen a U_0, ordenados por contenencia. Como $U_0 \in P$, $P \neq \emptyset$. También, la unión de elementos en una cadena de P está en P y es una cota superior de la cadena. Entonces U máximal en P por la proposión anterior es lagrangiano y contiene a U_0.

Proposición 6.16. *Suponga que V tiene dimensión finita y sea $V_1 \leq V$ un subespacio lagrangiano. Entonces dado $U \leq V$, isotrópico, tal que $U \cap V_1 = \{0\}$, exite $V_2 \leq V$ lagrangiano, tal que $U \leq V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, en particular*

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

Dem. Suponga que $\dim(V) = 2n$. Si $U = U^\sigma$, entonces $V_2 = U$ es lagrangiano, de lo contrario $\dim(U) = k < n$ y $\dim(U^\sigma) = 2n - k > n$, y, como $\dim(V_1) = n$,

$$\dim(U + V_1) = \dim(U) + \dim(V_1) - \dim(U \cap V_1) = k + n$$

Suponga por contradicción que $U^\sigma \subseteq U + V_1$, entonces tomando los espacios σ-ortogonales,

$$U^\sigma \cap V_1 = U^\sigma \cap V_1^\sigma = (U + V_1)^\sigma \subseteq (U^\sigma)^\sigma = U$$

de donde $U^\sigma \cap V_1 \subseteq U \cap V_1 = \{0\}$. Entonces

$$\dim(U^\sigma + V_1) = \dim(U^\sigma) + \dim(V_1) > n + n = 2n = \dim(V)$$

lo cual es una contradicción. Así pues, existe $u \in U^\sigma \setminus (U + V_1)$. Entonces, $u \notin V_1$ y para todo $u_1 + au, u_2 + bu \in U' = U + \mathrm{Sp}(\{u\})$, $u_1, u_2 \in U$ y $a, b \in K$,

$$\sigma(u_1 + au, u_2 + bu) = \sigma(u_1, u_2) + b\sigma(u_1, u) + a\sigma(u, u_2) + \sigma(u, u) = 0,$$

luego U' es isotrópico, $U' \cap V_1 = \{0\}$ y

$$U < U' \leq U'^\sigma < U^\sigma.$$

Reemplazamos U_0 por U' y continuamos recursivamente. Por monotonia de la dimensión, como V tiene dimensión finita, eventualmente obtenemos $V_2 = U'$ lagrangiano con $V_2 \cap V_1 = \{0\}$. Ahora como $\dim(V_1) = \dim(V_2) = n$ entonces $\dim(V_1 + V_2) = 2n$ y $V = V_1 \oplus V_2$. □

Propiedad 6.17. *Suponga que V tiene dimensión finita y sean $V_1, V_2 \leq V$ lagrangianos tales que*

$$V = V_1 \oplus V_2,$$

entonces si $\pi_1 : V \to V_1$ y $\pi_2 : V \to V_2$ son respectivamente las proyecciones sobre V_1 y V_2 dadas por la descomposición $V = V_1 \oplus V_2$,

$$\pi_1^*(V_1^*) = s(V_2) \qquad y \qquad \pi_2^*(V_2^*) = s(V_1)$$

Dem. (Ver Figura 6.1) Como π_1 y π_2 son sobreyectivas, π_1^* y π_2^* son inyectivas. Luego dado $\lambda \in \pi^*(V_1)$, existe un único $\lambda_1 \in V_1^*$ tal que $\pi^*(\lambda_1) = \lambda$. En particular, para todo $v_2 \in V_2$, como $\pi_1(v_2) = 0$,

$$\lambda(v_2) = \pi^*(\lambda_1)(v_2) = \lambda_1(\pi_1(v_2)) = 0.$$

Ahora, como V tiene dimensión finita $\sigma : V \to V^*$ es un isomorfismo, luego existe un único $v \in V$ tal que $\sigma(v) = \lambda$, pero $\sigma(v, v_2) = \lambda(v_2) = 0$ para todo $v_2 \in V_2$, entonces $v \in V_2^\sigma = V_2$. Así $\pi_1^*(V_1^*) \subseteq S(V_2)$. Reciprocamente, dado $v_2 \in V_2$, defina $\lambda_1 \in V_1^*$ por

$$\lambda_1 : v_1 \mapsto s(v_2)(v_1) = \sigma(v_2, v_1)$$

el mapa

$$\begin{array}{rcl} V_2 & \longrightarrow & \pi_1^*(V_1^*) \\ v & \longmapsto & s(v) = \lambda = \pi_1^*(\lambda_1) \end{array}$$

es inyectivo, y como V_1^* y $\sigma(V_2)$ tienen la misma dimensión, es un isomorfismo. □

Definición 6.18. Suponga que V tiene dimensión finita y sea $T = \{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$ una base de V. Decimos que T es una base de Darboux si para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{array}{rcccl} \sigma(v_i, v_j) & = & 0 & = & \sigma(w_i, w_j) \\ \sigma(w_i, v_j) & = & \delta_{ij}. & & \end{array}$$

Observación 6.19. Note que si $T = \{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$ es una base de Darboux entonces $V_1 = \mathrm{Sp}(\{v_1, \ldots, v_n\})$ y $V_2 = \mathrm{Sp}(\{w_1, \ldots, w_n\})$ son lagrangianos. Más aún si $T_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $T_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ y $T_1^* = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ y $T_2^* = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ son las bases de V_1^* y V_2^*, respectivamente, duales de T_1 y T_2. Entonces para $i = 1, \ldots, n$,

$$s(w_i) = \pi_1^*(\lambda_i) \qquad s(-v_i) = \pi_2^*(\mu_i).$$

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[rrr, dash, "s"] & & & \pi_2^*(V_2^*) \arrow[dl] \\
V_1 \oplus V_2 \arrow[r, equal] & V \arrow[ul, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \arrow[r, dash, "s"] & V^* = \pi_2^*(V_2^*) \oplus \pi_1^*(V_1^*) & \\
V_2 \arrow[rrr, dash, "s"] & & & \pi_1^*(V_1^*) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Figura 6.1: Descomposición lagrangiana

Teorema 6.20. *Suponga que V tiene dimensión finita, entonces V admite un base de Darboux.*

Dem. Como V tiene dimensión finita, existen $V_1, V_2 \leq V$ subespacios lagrangianos, tales que $V = V_1 \oplus V_2$. Sea $T_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V_1 y $T_1^* = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ la base de V_1^* dual de T_1. Como $s(V_2) = \pi_1^*(V_1^*)$, donde $\pi_1 : V \to V_1$ es la proyección en el primer sumando de la descomposición $V = V_1 \oplus V_2$, entonces existe $T_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base de V_2 tal que para $i = 1, \ldots, n$,

$$s(w_i) = \pi_1^*(\lambda_i).$$

Entonces como V_1 y V_2 son subespacios lagrangianos, en particular isotrópicos,

$$\sigma(v_i, v_j) = 0 = \sigma(w_i, w_j)$$

para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$; además

$$\sigma(w_i, v_j) = s(w_i)(v_j) = \pi_1^*(\lambda_i)(v_j) = \lambda_i\left(\pi_1(v_j)\right) = \lambda_i(v_j) = \delta_{ij}.$$

□

Propiedad 6.21. *Suponga que V tiene dimensión finita y sea $T = \{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$ una base de Darboux. Entonces para todo $v \in V$*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \sigma(w_i, v)v_i - \sigma(v_i, v)w_i.$$

En particular, si $v_1, v_2 \in V$ son tales que

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} q_i v_i + p_i w_i \qquad v_2 = \sum_{i=1}^{n} q_i' v_i + p_i' w_i$$

entonces

$$\sigma(v_1, v_2) = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i' - p_i' q_i$$

Dem. Sean $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in K$ tales que

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i + b_i w_i,$$

de forma que para $j = 1, \ldots, n$,

$$\sigma(v_j, v) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sigma(v_j, v_i) + b_i \sigma(v_j, w_i) = -b_j$$

y

$$\sigma(w_j, v) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sigma(w_j, v_i) + b_i \sigma(w_j, w_i) = a_j.$$

Finalmente

$$
\begin{aligned}
\sigma(v_1, v_2) &= \sigma(\sum_{i=1}^{n} q_i v_i + p_i w_i, \sum_{j=1}^{n} q'_j v_j + p'_j w_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} q_i q'_j \sigma(v_i, v_j) + p_i q'_j \sigma(w_i, v_j) + q_i p'_j \sigma(v_i, w_j) + p_i p'_j \sigma(w_i, w_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (p_i q'_j - q_i p'_j)\delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i q'_i - p'_i q_i
\end{aligned}
$$

$\square$

Observación 6.22. Note que si $T = \{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$, es una base de Darboux, para todo $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$,

$$V_J = \mathrm{Sp}\left(\{v_j, w_j\}_{j \in J}\right)$$

es también un subespacio simpléctico.

Teorema 6.23 (Ortogonalización de Gram-Schmidt)**.** *Suponga que* $\dim(V) = 2n$ *y sean* $U \leq V$ *subespacios simpléctico con* $\dim(U) = 2m$, $m \leq n$. *Entonces existe una base de Darboux* $T = \{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$ *de* V, *tal que*

$$U = \mathrm{Sp}\left(\{v_j, w_j\}_{j=1,\ldots,m}\right)$$

Dem. Sea $T' = \{v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_m\}$ una base de Darboux de U. Si $m = n$ hemos terminado. De lo contrario, $m + 1 \leq n$ y tome $v'_{m+1} \in V \setminus U$. Defina

$$v_{m+1} = v'_{m+1} - \left(\sum_{i=1}^{m} \sigma(w_i, v'_{m+1}) v_i - \sigma(v_i, v'_{m+1}) w_i \right)$$

de forma tal que para $j = 1, \ldots, m$,

$$
\begin{aligned}
\sigma(v_j, v_{m+1}) &= \sigma(v_j, v'_{m+1}) - \left(\sum_{i=1}^{m} \sigma(w_i, v'_{m+1}) \sigma(v_j, v_i) - \sigma(v_i, v'_{m+1}) \sigma(v_j, w_i) \right) \\
&= \sigma(v_j, v'_{m+1}) - \sum_{i=1}^{m} \sigma(v_i, v'_{m+1}) \delta_{ij} \\
&= \sigma(v_j, v'_{m+1}) - \sigma(v_j, v'_{m+1}) \\
&= 0;
\end{aligned}
$$

y,

$$\begin{aligned}
\sigma(w_j, v_{m+1}) &= \sigma(w_j, v'_{m+1}) - \left(\sum_{i=1}^{m} \sigma(w_i, v'_{m+1})\sigma(w_j, v_i) - \sigma(v_i, v'_{m+1})\sigma(w_j, w_i) \right) \\
&= \sigma(w_j, v'_{m+1}) - \sum_{i=1}^{m} \sigma(w_i, v'_{m+1})\delta_{ji} \\
&= \sigma(w_j, v'_{m+1}) - \sigma(w_j, v'_{m+1}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora, existe $w''_{m+1} \in V$ tal que $\sigma(w''_{m+1}, v_{m+1}) \neq 0$. Sea

$$w'_{m+1} = \frac{1}{\sigma(w''_{m+1}, v_{m+1})} w''_{m+1}$$

de forma que $\sigma(w'_{m+1}, v_{m+1}) = 1$. Defina

$$w_{m+1} = w'_{m+1} - \left(\sum_{i=1}^{m} \sigma(w_i, w'_{m+1})v_i - \sigma(v_i, w'_{m+1})w_i \right),$$

así $\sigma(w_{m+1}, v_{m+1}) = 1$ y al igual que con v_{m+1}, para $j = 1, \ldots, m$,

$$\sigma(w_{m+1}, v_j) = 0 = \sigma(w_{m+1}, w_j).$$

En particular $\{v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}, w_1, \ldots, w_{m+1}\}$ es base de Darboux de $U' = U + \mathrm{Sp}\left(\{v_{m+1}, w_{m+1}\right)$. Reemplazamos U por U' y continuamos recursivamente. $\square$

Propiedad 6.24. *Suponga que V tiene dimensión finita y sea $U < V$ subespacio simplectico. Entonces $U^\sigma < V$ es un subespacio simpléctico tal que*

$$V = U \oplus U^\sigma.$$

Dem. Sea $v \in U$. Como U es un espacio simpléctico, si $v \neq 0$, existe $w \in U$ tal que $\sigma(w, v) \neq 0$, luego $v \notin U^\sigma$. Luego

$$U \cap U^\sigma = \{0\}$$

Ahora como $\dim(U) + \dim(U^\sigma) = \dim(V)$, entonces $V = U \oplus U^\sigma$. Finalmente, sea $T = \{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$ una base de Darboux de V, tal que

$$U = \mathrm{Sp}\left(\{v_j, w_j\}_{j=1,\ldots,m}\right)$$

donde $2n = \dim(V)$ y $2m = \dim(U)$, $m < n$. Entonces si

$$U' = \mathrm{Sp}\left(\{v_j, w_j\}_{j=m+1,\ldots,n}\right),$$

$\dim(U') = \dim(U^\sigma)$ y $U' \subseteq U^\sigma$, luego $U' = U^\sigma$ es un subespacio simpléctico de V. $\square$

Definición 6.25. Suponga que V tiene dimensión finita y sea $U \leq V$ un subespacio simpléctico de V. Llamamos a U^σ el *complemento simpléctico de* U. A la proyección
$$p_U^\sigma : V \longrightarrow V$$
sobre U, definida por la descomposición $V = U \oplus U^\sigma$ la llamamos *proyección simpléctica sobre* U.

Propiedad 6.26. *Suponga que V tiene dimensión finita. Sean $V_1, V_2 < V$ subespacios lagrangianos tales que*
$$V = V_1 \oplus V_2$$
y sean $p_1 : V \to V$ y $p_2 : V \to V$ las respectivas proyecciones sobre V_1 y V_2 definidas por esta descomposición. Entonces para todo $v, w \in V$,
$$\sigma\left(p_1(v), w\right) = \sigma\left(v, p_2(w)\right).$$
Por otro lado, sea $U < V$ subespacio simpléctico, entonces para todo $v, w \in V$,
$$\sigma\left(p_U^\sigma(v), w\right) = \sigma\left(v, p_U^\sigma(w)\right).$$

Dem. Sean $v_1, w_1 \in V_1$ y $v_2, w_2 \in V_2$ tales que
$$v = v_1 + w_1 \qquad w = w_1 + w_2,$$
entonces
$$\begin{aligned}
\sigma\left(p_1(v), w\right) &= \sigma(v_1, w_1) + \sigma(v_1, w_2) = \sigma(v_1, w_2) \\
\sigma\left(v, p_2(w)\right) &= \sigma(v_1, w_2) + \sigma(v_2, w_2) = \sigma(v_1, w_2).
\end{aligned}$$
Considere ahora $v', w' \in U^\sigma$ tales que
$$v = p_U^\sigma(v) + v' \qquad w = p_U^\sigma(w) + w'.$$
Entonces
$$\begin{aligned}
\sigma\left(p_U^\sigma(v), w\right) &= \sigma\left(p_U^\sigma(v), p_U^\sigma(w)\right) + \sigma\left(p_U^\sigma(v), w'\right) = \sigma\left(p_U^\sigma(v), p_U^\sigma(w)\right) \\
\sigma\left(v, p_U^\sigma(w)\right) &= \sigma\left(p_U^\sigma(v), p_U^\sigma(w)\right) + \sigma\left(v', p_U^\sigma(w)\right) = \sigma\left(p_U^\sigma(v), p_U^\sigma(w)\right).
\end{aligned}$$
□

6.3. Operadores adjuntos

Sea V un espacio simpléctico y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ un operador.

Definición 6.27. Sea $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$, decimos que g es un *operador adjunto de* f si para todo $v, w \in V$
$$\sigma\left(f(v), w\right) = \sigma\left(v, g(w)\right).$$
Decimos que f es *auto-adjunto* si f es un operador adjunto de f.

Observación 6.28. Note que si g es adjunto de f, entonces f es adjunto de g. De hecho

$$\sigma\left(g(v), w\right) = -\sigma\left(w, g(v)\right) = -\sigma\left(f(w), v\right) = \sigma\left(v, f(w)\right).$$

Definición 6.29. Sea $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $A \in M_{2n\times 2n}(K)$, definimos la *matriz adjunta simpléctica* de A por $A^{sigma} \in M_{2n\times 2n}(K)$ tal que

$$A^{\sigma} = J^{-1}A^{\intercal}J$$

con $J \in M_{2n\times 2n}(K)$ tal que

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

donde 0 denota el origen de $M_{n\times n}(K)$ y $I_n \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ es la matriz con unos en la diagonal y ceros en el resto de entradas. Es decir si $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} \in M_{n\times n}(K)$ son tales que

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

entonces

$$A^{\sigma} = \begin{bmatrix} A_{22}^{\intercal} & -A_{12}^{\intercal} \\ -A_{21}^{\intercal} & A_{11}^{\intercal} \end{bmatrix}.$$

Decimos que A es *auto-adjunta simpléctica* si $A^{\sigma} = A$. Es decir si $A_{11} = A_{22}^{\intercal}$, $A_{12} = -A_{12}^{\intercal}$ y $A_{21} = -A_{12}^{\intercal}$.

Proposición 6.30. *Suponga que V tiene dimensión finita, entonces existe un único operador $g \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$ adjunto de f. Más aún, si $T = \{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$ es una base de Darboux de V, entonces*

$$\Big[g\Big]_T^T = \left(\Big[f\Big]_T^T\right)^{\sigma}$$

Dem. Defina el operador $g \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$ por la imagen de la base T:

$$\begin{aligned} g(v_j) &= \sum_{i=1}^{n} \sigma(f(w_i), v_j)v_i - \sigma(f(v_i), v_j)w_i, \\ g(w_j) &= \sum_{i=1}^{n} \sigma(f(w_i), w_j)v_i - \sigma(f(v_i), w_j)w_i. \end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned} \sigma\left(v_i, g(v_j)\right) &= \sigma\left(f(v_i), v_j\right) \\ \sigma\left(v_i, g(w_j)\right) &= \sigma\left(f(v_i), w_j\right) \\ \sigma\left(w_i, g(v_j)\right) &= \sigma\left(f(w_i), v_j\right) \\ \sigma\left(w_i, g(w_j)\right) &= \sigma\left(f(w_i), w_j\right) \end{aligned}$$

y por Propiedad 6.21

$$\begin{aligned}
\sigma(v, g(w)) &= \sum_{i=1}^{n} \sigma(v_i, g(w))\,\sigma(w_i, v) - \sigma(v_i, v)\,\sigma(w_i, g(w)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\sigma(w_j, w)\,\sigma(v_i, g(v_j)) - \sigma(v_j, w)\,\sigma(v_i, g(w_j))\Big)\sigma(w_i, v) \\
&\quad -\sigma(v_i, v)\Big(\sigma(w_j, w)\,\sigma(w_i, g(v_j)) - \sigma(v_j, w)\,\sigma(w_i, g(w_j))\Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\sigma(w_j, w)\,\sigma(f(v_i), v_j) - \sigma(v_j, w)\,\sigma(f(v_i), w_j)\Big)\sigma(w_i, v) \\
&\quad -\sigma(v_i, v)\Big(\sigma(w_j, w)\,\sigma(f(w_i), v_j) - \sigma(v_j, w)\,\sigma(f(w_i), w_j)\Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sigma(v_j, w)\Big(\sigma(v_i, v)\,\sigma(f(w_i), w_j) - \sigma(w_i, v)\,\sigma(f(v_i), w_j)\Big) \\
&\quad -\Big(\sigma(v_i, v)\,\sigma(f(w_i), v_j) - \sigma(w_i, v)\,\sigma(f(v_i), v_j)\Big)\sigma(w_j, w) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sigma(v_j, w)\Big(\sigma(w_i, v)\,\sigma(w_j, f(v_i)) - \sigma(v_i, v)\,\sigma(w_j, f(w_i))\Big) \\
&\quad -\Big(\sigma(w_i, v)\,\sigma(v_j, f(v_i)) - \sigma(v_i, v)\,\sigma(v_j, f(w_i))\Big)\sigma(w_j, w) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sigma(v_j, w)\,\sigma(w_j, f(v)) - \sigma(v_j, f(v))\,\sigma(w_j, w) \\
&= \sigma(f(v), w)
\end{aligned}$$

Por otro lado si, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ es adjunto de f, por Propiedad 5.12,

$$\begin{aligned}
h(v_j) &= \sum_{i=1}^{n} \sigma(w_i, h(v_j))\,v_i - \sigma(v_i, h(v_j))\,w_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sigma(f(w_i), v_j)\,v_i - \sigma(f(v_i), v_j)\,w_i \\
&= g(u_j), \\
h(w_j) &= \sum_{i=1}^{n} \sigma(w_i, h(w_j))\,v_i - \sigma(v_i, h(w_j))\,w_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sigma(f(w_i), w_j)\,v_i - \sigma(f(v_i), w_j)\,w_i \\
&= g(w_j).
\end{aligned}$$

luego $h = g$.

Ahora, para ver que la representación matricial de g respecto a T es la adjunta simpléctica de la de f basta observar que para $i, j = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
\Big[g\Big]^T_{T,(i,j)} &= \Big[g(v_j)\Big]^T_i \\
&= \sigma\left(w_i, g(v_j)\right) \\
&= \sigma\left(f(w_i), v_j\right) \\
&= -\sigma\left(v_j, f(w_i)\right) \\
&= \Big[f(w_i)\Big]^T_{n+j} \\
&= \Big[f\Big]^T_{T,(n+j,n+i)}, \\
\Big[g\Big]^T_{T,(n+i,n+j)} &= \Big[g(w_j)\Big]^T_{n+i} \\
&= -\sigma\left(v_i, g(w_j)\right) \\
&= -\sigma\left(f(v_i), w_j\right) \\
&= \sigma\left(w_j, f(v_i)\right) \\
&= \Big[f(v_i)\Big]^T_j \\
&= \Big[f\Big]^T_{T,(j,i)}, \\
\Big[g\Big]^T_{T,(n+i,j)} &= \Big[g(v_j)\Big]^T_{n+i} \\
&= -\sigma\left(v_i, g(v_j)\right) \\
&= -\sigma\left(f(v_i), v_j\right) \\
&= \sigma\left(v_j, f(v_i)\right) \\
&= -\Big[f(v_i)\Big]^T_{n+j} \\
&= -\Big[f\Big]^T_{T,(n+j,i)}, \\
\Big[g\Big]^T_{T,(i,n+j)} &= \Big[g(w_j)\Big]^T_i \\
&= \sigma\left(w_i, g(w_j)\right) \\
&= \sigma\left(f(w_i), w_j\right) \\
&= -\sigma\left(w_j, f(w_i)\right) \\
&= -\Big[f(w_i)\Big]^T_j \\
&= -\Big[f\Big]^T_{T,(j,n+i)}.
\end{aligned}$$

□

Notación 6.31. Si V tiene dimensión finita, a la adjunta de f la denotaremos por f^*.

Observación 6.32. Note que si V tiene dimensión finita, para todo $v, w \in V$,

$$\begin{aligned} f^*\left(s(v))(w)\right) &= s(v)\left(f(w)\right) \\ &= \sigma(v, f(w)) \\ &= \sigma(f^*(v), w) \\ &= s\left(f^*(v)\right)(w) \end{aligned}$$

luego

$$f^* \circ s = s \circ f^*$$

donde a la izquierda en la igualdad tenemos el dual y a la derecha el adjunto.

Observación 6.33. Si V tiene dimensión finita $f^* \circ f$ es auto-adjunta, de hecha para todo $v, w \in V$

$$\sigma(v, f^* \circ f(w)) = \sigma(f(v), f(w)) = \sigma(f^* \circ f(v), w).$$

Proposición 6.34. *Si V tiene dimensión finita, las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *f es auto-adjunta; y,*

2. *la representación matricial de f respecto a una base de Darboux es auto-adjunta sympléctica.*

Dem. Proposión 6.30 implica que si f es auto-adjunta, su representación matricial respecto a una base de Darboux es auto-adjunta sympléctica. Para establecer el converso, tomamos una base de Darboux $T = \{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$ asumimos que $\Big[f\Big]_T^T$ es auto-adjunta simpléctica, es decir para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned}
\sigma\left(w_i, f(v_j)\right) &= \Big[f\Big]_{T,(i,j)}^T \\
&= \Big[f\Big]_{T,(n+j,n+i)}^T \\
&= -\sigma\left(v_j, f(w_i)\right) \\
-\sigma\left(v_i, f(w_j)\right) &= \Big[f\Big]_{T,(n+i,n+j)}^T \\
&= \Big[f\Big]_{T,(j,i)}^T \\
&= \sigma\left(w_j, f(v_i)\right) \\
-\sigma\left(v_i, f(v_j)\right) &= \Big[f\Big]_{T,(n+i,j)}^T \\
&= -\Big[f\Big]_{T,(n+j,i)}^T \\
&= \sigma\left(v_j, f(v_i)\right) \\
\sigma\left(w_i, f(w_j)\right) &= \Big[f\Big]_{T,(i,n+j)}^T \\
&= -\Big[f\Big]_{T,(j,n+i)}^T \\
&= -\sigma\left(w_j, f(w_i)\right),
\end{aligned}$$

en particular

$$\begin{aligned}
\sigma\left(v_i, f(v_j)\right) &= \sigma\left(f(v_i), v_j\right) \\
\sigma\left(v_i, f(w_j)\right) &= \sigma\left(f(v_i), w_j\right) \\
\sigma\left(w_i, f(v_j)\right) &= \sigma\left(f(w_i), v_j\right) \\
\sigma\left(w_i, f(w_j)\right) &= \sigma\left(f(w_i), w_j\right).
\end{aligned}$$

Así, por la demostración de Proposición 6.30, estás igualdades implican que el adjunto de f es él mismo. $\square$

Ejemplo 6.35. Suponga que $V = U \times U^*$ y

$$\sigma\left((v, \lambda), (w, \mu)\right) = \lambda(w) - \mu(v).$$

Sea ahora $g \in \mathrm{Hom}_K(U, U)$ y tome

$$f(v, \lambda) = (g(v), g^*(\lambda))$$

de forma que

$$\begin{aligned}
\sigma\left((v, \lambda), f(w, \mu)\right) &= \lambda(g(w)) - g^*(\mu)(v) \\
&= g^*(\lambda)(w) - \mu(g(v)) \\
&= \sigma\left(f(v, \lambda), (w, \mu)\right),
\end{aligned}$$

luego f es auto-adjunto.

Observación 6.36. El operador del ejemplo anterior es de hecho la forma más general de operador auto-adjunto sobre un espacio simpléctico. Es decir, dado un operador auto-adjunto, existe una descomposición del espacio en subespacios invariantes compatibles con el operador tales que este toma la forma como el operador f en Ejemplo 6.35. El resto de este capítulo tiene como objetivo establecer ese resultado para el caso en el que el polinomio característico del operador se factoriza en factores lineales en K.

Lema 6.37. *Suponga que V tiene dimensión finita y que f es auto-adjunto, entonces:*

1. *si f es una proyección, es decir $f^2 = f$, entonces $f(V)$ es un subespacio simpléctico;*
2. *para todo $P(t) \in K[t]$, $P(f)$ es auto-adjunto.*

Dem.

1. Como f es una proyección $V = f(V) \oplus \ker(f)$, y para $v \in V$
$$v = f(v) + (v - f(v))$$
con $f(v) \in f(V)$ y $v - f(v) \in \ker(f)$. Para probar el lema basta con establecer que $\ker(f) = f(V)^\sigma$, pues en tal caso, como $f(V) \cap \ker(f) = \{0\}$ tendríamos $f(V) \cap f(V)^\sigma = \{0\}$, y la conclusión se sigue de Proposición 6.13.1. Ahora, dado $v \in \ker(f)$, para todo $w \in V$,
$$\sigma(f(w), v) = \sigma(w, f(v)) = 0$$
luego $v \in f(V)^\sigma$, y así $\ker(f) \subseteq f(V)^\sigma$. Pero $\dim(\ker(f)) = V - \dim(f(V)) = \dim(f(V)^\sigma)$, entonces $\ker(f) = f(V)^\sigma$.

2. Si $P(t) = \sum_{i=0}^{d} a_i t^i$, para todo $v, w \in V$ tenemos
$$\begin{aligned}
\sigma\big(v, P(f)(w)\big) &= \sum_{i=0}^{d} a_i \sigma\big(v, f^i(w)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{d} a_i \sigma\big(f^i(v), w\big) \\
&= \sigma\big(P(f)(v), w\big).
\end{aligned}$$

□

Proposición 6.38. *Suponga que V tiene dimensión finita, que f es auto-adjunto y que*
$$P_f(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \ldots (t - \lambda_r)^{m_r}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}.$$
con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Entonces para $i = 1, \ldots, r$, $V_i = \ker(P_i(f)^{m_i})$ es un subespacio simpléctico invariante bajo f, y
$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r.$$

Dem. La descomposición $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ como suma directa de subespacios invariantes bajo f es consecuencia directa de Propiedad 2.24, y al considerar también la afirmación 2. del lema anterior obtenemos que la proyección sobre cada uno de estos subespacios es auto-adjunta. La primera afirmación del mismo lema implica que cada uno de estos V_i, $i = 1, \ldots, r$, es un subespacio simpléctico. $\square$

Capítulo 7

Álgebra Multilineal

Sea K un cuerpo y V, W espacios vectoriales sobre K.

Notación 7.1. Dado $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ denotamos

$$V^k = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-\text{veces}}$$

y para $k = 0$ usamos la convención $V^0 = K$.

7.1. Tensores

Definición 7.2. Sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $T : V^k \longrightarrow K$ una función. Decimos que T es *multilineal* si para $i = 1 \ldots k$ tenemos

$$T(v_1, \ldots, c_i v_i + c_i' v_i', \ldots, v_k) = c_i T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + c_i' T(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_k)$$

para todo $v_1, \ldots, v_i, v_i', \ldots, v_k \in V$ y $c_i, c_i' \in K$. Si T es multilineal decimos que T es un k-*tensor*. Al conjunto de k-tensores lo denotamos por $T^k(V)$.

Observación 7.3. Para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ el conjunto $T^k(V)$ es un espacio vectorial sobre K bajo las operaciones:

$$\begin{array}{rccl} S+T: & V^k & \longrightarrow & K \\ & (v_1, \ldots, v_k) & \longmapsto & S(v_1, \ldots, v_k) + T(v_1, \ldots, v_k) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} cT: & V^k & \longrightarrow & K \\ & (v_1, \ldots, v_k) & \longmapsto & cT(v_1, \ldots, v_k) \end{array}$$

para todo $S, T \in T^k(V)$ y $c \in K$.

Observación 7.4. $T^0(V) \simeq K$ y $T^1(V) = V^*$.

Ejemplo 7.5. Sea $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

1. La función
$$\begin{array}{rccl} \langle \bullet ; \bullet \rangle : & K^n \times K^n & \longrightarrow & K \\ & \Big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\Big) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array}$$
define un 2-tensor.

2. Sea $a_{ij} \in K$, $i, j = 1, \dots, n$. La función
$$\begin{array}{rccl} T : & K^n \times K^n & \longrightarrow & K \\ & \Big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\Big) & \longmapsto & \sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j \end{array}$$
define un 2-tensor.

3. La función
$$\begin{array}{rccl} \det : & \Big(K^n\Big)^n & \longrightarrow & K \\ & \Big(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n\Big) & \longmapsto & \det(x_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)1} \dots x_{\sigma(n)n} \end{array}$$
donde $\overline{x}_j = (x_{1j}, \dots, x_{nj})$ para $j = 1, \dots, n$ define un n-tensor.

Definición 7.6. Sean $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dados $S \in T^k(V)$ y $T \in T^l(V)$ definimos su *producto tensorial* $S \otimes T \in T^{k+l}(V)$ por
$$S \otimes T(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = S(v_1, \dots, v_k) T(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$$
para todo $v_1, \dots, v_{k+l} \in V$.

Observación 7.7. El producto tensorial no es conmutativo pues no siempre es cierto que $S \otimes T$ y $S \otimes T$ coincidan.

Propiedad 7.8. *El producto tensorial es bilineal y asociativo. Es decir, dados $k, l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $S, S' \in T^k(V)$, $T, T' \in T^l(V)$, $U \in T^m(V)$, $c \in K$ tenemos:*

1. $(S + S') \otimes T = S \otimes T + S' \otimes T$,
2. $S \otimes (T + T') = S \otimes T + S \otimes T'$,
3. $(cS) \otimes T = c(S \otimes T) = S \otimes (cT)$,
4. $(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U)$.

Dem. La demostración es una verificación directa. $\square$

Notación 7.9. Por la Proposición 7.8 4. denotamos $S \otimes T \otimes U = (S \otimes T) \otimes U$ y así podemos definir producto tensorial de más de dos tensores.

Teorema 7.10. *Suponga que $\dim_K(V) = n < \infty$. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ la base dual. Para todo $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, la colección de k-tensores*
$$\Big\{\lambda_{i_1} \otimes \dots \otimes \lambda_{i_k}\Big\}_{i_1, \dots, i_k = 1}^n$$
es una base de $T^k(V)$. En particular
$$\dim_K(T^k) = n^k.$$

Dem. Veamos primero que

$$T^k(V) = \langle \lambda_{i_1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{i_k} \rangle_{i_1,\ldots,i_k=1}^n.$$

Note que para todo $i_1 \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\lambda_{i_1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{i_k}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) = \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_k j_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 = j_1, \ldots, i_k = j_k \\ 0 & \text{si no} \end{cases} .$$

Así, si $w_1, \ldots, w_k \in V$ y $w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$, $a_{ij} \in K$, $j = 1, \ldots, k$ entonces

$$\begin{aligned} \lambda_{i_1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{i_k}(w_1, \ldots, w_k) &= \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^n a_{j_1 1} \cdots a_{j_k k} \lambda_{i_1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{i_k}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) \\ &= \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^n a_{j_1 1} \cdots a_{j_k k} \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_k j_k} \\ &= a_{i_1 1} \cdots a_{i_k k} \end{aligned}$$

Ahora, dado $T \in T^k(V)$

$$\begin{aligned} T(w_1, \ldots, w_k) &= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^n a_{i_1 1} \cdots a_{i_k k} T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^n T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \lambda_{i_1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{i_k}(w_1, \ldots, w_k) \end{aligned}$$

luego

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^n T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \lambda_{i_1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{i_k},$$

y $T^k(V) = \langle \lambda_{i_1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{i_k} \rangle_{i_1,\ldots,i_k=1}^n$.

Establezcamos ahora la independencia lineal. Suponga que

$$0 = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^n c_{i_1 \ldots i_k} \lambda_{i_1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{i_k}.$$

Si evaluamos en $(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})$ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^n c_{i_1 \ldots i_k} \lambda_{i_1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{i_k}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) \\ &= c_{j_1,\ldots,j_k}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 7.11. Sea $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base canónica de K^n y $\{f_1, \ldots, f_n\}$ la base dual.

1. Si
$$\begin{array}{rccl} \langle \bullet ; \bullet \rangle : & K^n \times K^n & \longrightarrow & K \\ & \big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array}$$
entonces $\langle \bullet ; \bullet \rangle = \sum_{i=1}^n f_i \otimes f_i$.

2. Sea $a_{ij} \in K$, $i, j = 1, \dots, n$. Si
$$\begin{array}{rccl} T : & K^n \times K^n & \longrightarrow & K \\ & \big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) & \longmapsto & \sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j \end{array}$$
entonces $T = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} f_i \otimes f_j$.

3. Si
$$\begin{array}{rccl} \det : & \big(K^n\big)^n & \longrightarrow & K \\ & (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n) & \longmapsto & \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)1} \dots x_{\sigma(n)n} \end{array}$$
donde $\overline{x}_j = (x_{1j}, \dots, x_{nj})$ para $j = 1, \dots, n$ entonces
$$\det = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}.$$

Definición 7.12. Sea $f \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$. Dado $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definimos
$$\begin{array}{rcl} f^* : T^k(W) & \longrightarrow & T^k(V) \\ T & \longmapsto & f^*T : (v_1, \dots, v_k) \mapsto T\big(f(v_1), \dots, f(v_k)\big). \end{array}$$

Proposición 7.13. *Sea $f \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$ y $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Para todo $S \in T^k(W)$ y $T \in T^l(W)$ tenemos*
$$f^*(S \otimes T) = f^*S \otimes f^*T.$$

Dem. La demostración es una verificación inmediata. $\square$

7.2. Tensores alternantes

Definición 7.14. Sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $\omega \in T^k(V)$, decimos que ω es *alternante* si
$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = 0, \quad v_1, \dots, v_k \in V$$
siempre que $v_i = v_j$ para algún par $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$. Denotamos por $\Lambda^k(V)$ al subespacio de $T^k(V)$ de k-tensores alternantes.

Propiedad 7.15. *Sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $\omega \in T^k(V)$ un k-tensor alternante, entonces*
$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$
para todo $v_1, \dots, v_k \in V$ y todo $1 \leq i < j \leq k$.

Dem.

$$\begin{aligned}0 =&\omega(v_1,\dots,v_i+v_j,\dots,v_i+v_j,\dots,v_k)\\ =&\omega(v_1,\dots,v_i,\dots,v_i,\dots,v_k)+\omega(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_k)\\ &+\omega(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_k)+\omega(v_1,\dots,v_j,\dots,v_j,\dots,v_k)\\ =&\omega(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_k)+\omega(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_k)\end{aligned}$$

□

Observación 7.16. Sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $\omega \in \Lambda^k(V)$, para toda permutación $\sigma \in S_k$ tenemos

$$\omega(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}) = -\operatorname{sgn}(\sigma)\omega(v_1,\dots,v_k).$$

Esta última igualdad es la que justifica el nombre de alternante.

Observación 7.17. $\Lambda^0(V) = T^0(V) \simeq K$ y $\Lambda^1(V) = T^1(V) = V^*$.

Ejemplo 7.18. Sea $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

1. La función determinante

$$\begin{array}{rccl}\det: & \left(K^n\right)^n & \longrightarrow & K\\ & (\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n) & \longmapsto & \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)x_{\sigma(1)1}\dots x_{\sigma(n)n}\end{array}$$

   donde $\overline{x}_j = (x_{1j},\dots,x_{nj})$ para $j = 1,\dots,n$ define un n-tensor alternante.

2. Sea $k \in \{1,\dots,n\}$ y $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. La función determinante menor

$$\begin{array}{rccl}\det_{i_1\dots i_k}: & \left(K^n\right)^k & \longrightarrow & K\\ & (\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_k) & \longmapsto & \sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)x_{i_{\sigma(1)}1}\dots x_{i_{\sigma(k)}k}\end{array}$$

   donde $\overline{x}_j = (x_{1j},\dots,x_{nj})$ para $j = 1,\dots,n$ define un k-tensor alternante.

Observación 7.19. Sea $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$, el $k+l$-tensor $\omega \otimes \eta$ no es necesariamente alternante. Para obtener un tensor alternante hace falta proyectar sobre el subespacio $\Lambda^{k+l}(V) \leq T^{k+l}(V)$.

Definición 7.20. Sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que si $\operatorname{char}(K) > 0$ entonces $k < \operatorname{char}(K)$. Definimos $\operatorname{Alt} \in \operatorname{Hom}_K\left(T^k(V), T^k(V)\right)$ por

$$\operatorname{Alt}(T)(v_1,\dots,v_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)T(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})$$

Ejemplo 7.21. Sea $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base canónica de K^n y $\{f_1,\dots,f_n\}$ la base dual.

1. Para $\mathrm{char}(K) > 0$ suponga que $n < \mathrm{char}(K)$. Si $T = f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$, tenemos que para todo $\overline{x}_j = (x_{1j}, \ldots, x_{nj}) \in K^n$, $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(T)(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) f_1 \otimes \cdots \otimes f_n(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots x_{\sigma^{-1}(n)n} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) x_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots x_{\sigma^{-1}(n)n} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} \\
&= \frac{1}{n!} \det\big(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\big)
\end{aligned}$$

así $\mathrm{Alt}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \frac{1}{n!} \det$.

2. Sea $k \in \{1, \ldots, n\}$ y $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$. Para $\mathrm{char}(K) > 0$ suponga que $k < \mathrm{char}(K)$. Si $T = f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}$, tenemos que para todo $\overline{x}_j = (x_{1j}, \ldots, x_{nj}) \in K^n$, $j = 1, \ldots, k$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(T)(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{i_1\sigma(1)} \cdots x_{i_k\sigma(k)} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{i_{\sigma^{-1}(1)}1} \cdots x_{i_{\sigma^{-1}(k)}k} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) x_{i_{\sigma^{-1}(1)}1} \cdots x_{i_{\sigma^{-1}(k)}k} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{i_{\sigma(1)}1} \cdots x_{i_{\sigma(k)}k} \\
&= \frac{1}{k!} \det{}_{i_1 \ldots i_k}\big(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k\big)
\end{aligned}$$

así $\mathrm{Alt}(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}) = \frac{1}{k!} \det_{i_1 \ldots i_k}$.

Proposición 7.22. *Para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ el operador* Alt *es una proyección sobre $\Lambda^k(V)$. Es decir:*

1. *para todo $T \in T^k(V)$, $\mathrm{Alt}(T) \in \Lambda^k(V)$,*

2. *para todo $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\mathrm{Alt}(\omega) = \omega$,*

3. $\mathrm{Alt} \circ \mathrm{Alt} = \mathrm{Alt}$.

Dem.

1. Dados $1 \leq i < j \leq k$, defina $\tau \in S_k$ la transposición que intercambia i y j (y deja al resto de elementos en $\{1, \dots, k\}$ fijos). Sea A_k el subgrupo de S_k formado por las permutaciones con signo 1, de forma que si $\tau A_k = \{\tau\sigma \in S_k \| \ \sigma \in A_k\}$ entonces $S_k = A_k \cup \tau A_k$ es una partición de S_k. Nota que $\mathrm{sgn}(\tau\sigma) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$ para todo $\sigma \in S_k$. Sean $v_1, \dots, v_k \in V$ tales que $v_i = v_j$, entonces para todo $\sigma \in S_k$ tenemos

$$(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (v_{\tau\sigma(1)}, \dots, v_{\tau\sigma(k)})$$

y así

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Alt}(T)(v_1, \dots, v_k) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)} \dots, v_{\sigma(k)}) \\
&= \frac{1}{k!} \left(\sum_{\sigma \in A_k} \mathrm{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) + \sum_{\sigma \in \tau A_k} \mathrm{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \right) \\
&= \frac{1}{k!} \left(\sum_{\sigma \in A_k} \mathrm{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) + \sum_{\sigma \in A_k} \mathrm{sgn}(\tau\sigma) T(v_{\tau\sigma(1)}, \dots, v_{\tau\sigma(k)}) \right) \\
&= \frac{1}{k!} \left(\sum_{\sigma \in A_k} \mathrm{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) - \sum_{\sigma \in A_k} \mathrm{sgn}(\sigma) T(v_{\tau\sigma(1)}, \dots, v_{\tau\sigma(k)}) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

luego $\mathrm{Alt}(T) \in \Lambda^k(V)$.

2. Sea $\omega \in \Lambda^k(V)$, entonces para todo $v_1, \dots, v_k \in V$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(\omega)(v_1, \dots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \, \mathrm{sgn}(\sigma) \omega(v_1, \dots, v_k) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \omega(v_1, \dots, v_k) \\
&= \frac{1}{k!} k! \ \omega(v_1, \dots, v_k) \\
&= \omega(v_1, \dots, v_k)
\end{aligned}$$

luego $\mathrm{Alt}(\omega) = \omega$.

3. Se sigue inmediatamente de 1. y 2.

□

Definición 7.23. Sea $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que si $\mathrm{char}(K) > 0$ entonces $k + l < \mathrm{char}(K)$. Sea $\omega \in \Lambda^k V$ y $\eta \in \Lambda^l(V)$, definimos el *producto exterior* $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(V)$ por

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!\ l!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

Lema 7.24. *Sea $k, l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que si $\mathrm{char}(K) > 0$ entonces $k + l + m < \mathrm{char}(K)$. Sea $S \in T^k(V)$, $T \in T^l(V)$ y $U \in T^m(V)$ tenemos que*

1. *si* $\mathrm{Alt}(S) = 0$ *entonces* $\mathrm{Alt}(S \otimes T) = 0 = \mathrm{Alt}(T \otimes S)$,
2. $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(S \otimes T) \otimes U) = \mathrm{Alt}(S \otimes T \otimes U) = \mathrm{Alt}(S \otimes \mathrm{Alt}(T \otimes U))$

Dem.

1. Tome S_k como el subgrupo de S_{k+l} formado por la permutaciones que dejan fijos a $k + 1, \ldots, k + l$ y sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_N \in S_{k+l}$, $N = (k + l)!/(k!)$, representantes de los coconjuntos $S_k\sigma = \{\tau\sigma \in S_{k+l} |\ \tau \in S_k\}$, $\sigma \in S_{k+l}$, de forma que
$$S_{k+l} = \cup_{i=1}^N \sigma_i S_k$$
es una partición de S_{k+l}. Entonces para todo $v_1, \ldots, v_{k+l} \in V$
$$\begin{aligned}
&\mathrm{Alt}(S \otimes T)(v_1, \ldots, v_{k+l})\\
&= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma) S \otimes T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)})\\
&= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\tau \in S_k} \mathrm{sgn}(\tau\sigma_i) S \otimes T(v_{\tau\sigma_i(1)}, \ldots, v_{\tau\sigma_i(k+l)})\\
&= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{sgn}(\sigma_i) \sum_{\tau \in S_k} \mathrm{sgn}(\tau) S(v_{\tau\sigma_i(1)}, \ldots, v_{\tau\sigma_i(k)}) T(v_{\tau\sigma_i(k+1)}, \ldots, v_{\tau\sigma_i(k+l)}).
\end{aligned}$$
Para $i = 1, \ldots, N$ y $j = 1, \ldots, k+l$, denote $w_j^{(i)} = v_{\sigma_i(j)}$, así, como $\mathrm{Alt} = 0$ entonces
$$\begin{aligned}
&\mathrm{Alt}(S \otimes T)(v_1, \ldots, v_{k+l})\\
&= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{sgn}(\sigma_i) \sum_{\tau \in S_k} \mathrm{sgn}(\tau) S(w_{\tau(1)}^{(i)}, \ldots, w_{\tau(k)}^{(i)}) T(w_{\tau(k+1)}^{(i)}, \ldots, w_{\tau(k+l)}^{(i)})\\
&= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{sgn}(\sigma_i) \sum_{\tau \in S_k} \mathrm{sgn}(\tau) S(w_{\tau(1)}^{(i)}, \ldots, w_{\tau(k)}^{(i)}) T(w_{k+1}^{(i)}, \ldots, w_{k+l}^{(i)})\\
&= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{sgn}(\sigma_i) \left(\sum_{\tau \in S_k} \mathrm{sgn}(\tau) S(w_{\tau(1)}^{(i)}, \ldots, w_{\tau(k)}^{(i)}) \right) T(w_{k+1}^{(i)}, \ldots, w_{k+l}^{(i)})\\
&= \frac{k!}{(k+l)!} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{sgn}(\sigma_i) \mathrm{Alt}(S)(w_1^{(i)}, \ldots, w_k^{(i)}) T(w_{k+1}^{(i)}, \ldots, w_{k+l}^{(i)})\\
&= 0
\end{aligned}$$

Similarmente, si tomamos S_k como el subgrupo de S_{k+l} formado por la permutaciones que dejan fijos a $1, \ldots, l$, obtenemos $\operatorname{Alt}(T \otimes S) = 0$.

2. $\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(S \otimes T) - S \otimes T) = \operatorname{Alt}(S \otimes T) - \operatorname{Alt}(S \otimes T) = 0$, luego por 1.

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Alt}\left((\operatorname{Alt}(S \otimes T) - S \otimes T) \otimes U\right) \\ &= \operatorname{Alt}\left(\operatorname{Alt}(S \otimes T) \otimes U\right) - \operatorname{Alt}(S \otimes T \otimes U) \end{aligned}$$

y así $\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(S \otimes T) \otimes U) = \operatorname{Alt}(S \otimes T \otimes U)$. Similarmente obtenemos $\operatorname{Alt}(S \otimes \operatorname{Alt}(T \otimes U)) = \operatorname{Alt}(S \otimes T \otimes U)$.

□

Propiedad 7.25. *El producto exterior es bilineal, asociativo y anticonmutativo. Es decir, dados $k, l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que si $\operatorname{char}(K) > 0$ entonces $k+l+m < \operatorname{char}(K)$ y $\omega, \omega' \in \Lambda^k(V)$, $\eta, \eta' \in \Lambda^l(V)$, $\theta \in \Lambda^m(V)$, $c \in K$ tenemos:*

1. $(\omega + \omega') \wedge \eta = \omega \wedge \eta + \omega' \wedge \eta$,

2. $\omega \wedge (\eta + \eta') = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \eta'$,

3. $(c\omega) \wedge \eta = c(\omega \wedge \eta) = \omega \wedge (c\eta)$,

4. $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$,

5. $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(k+l+m)!}{k!\ l!\ m!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$.

Dem. Las propiedades 1., 2. y 3. se siguen inmediatamente de la bilinearidad de $\otimes$ y de la linearidad de Alt.

4. Sea $\tau \in S_{k+l}$ definida por

$$\tau(i) = \begin{cases} i + k & \text{si } 1 \leq i \leq l \\ i - l & \text{si } l + 1 \leq i \leq l + k \end{cases}$$

Como $\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^{kl}$ y $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = (-1)^{kl} \operatorname{sgn}(\sigma)$ para toda $\sigma \in S_{k+l}$

entonces para todo $v_1, \ldots, v_{k+l} \in V$

$$
\begin{aligned}
&\omega \wedge \eta(v_1, \ldots, v_{k+l}) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!\, l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta)(v_1, \ldots, v_{k+l}) \\
&= \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega \otimes \eta(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}, v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}) \\
&= \frac{(1}{k!\, l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}) \\
&= \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma\tau(l+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(l+k)}) \eta(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(l)}) \\
&= \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (-1)^{kl} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \eta(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(l)}) \omega(v_{\sigma\tau(l+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(l+k)}) \\
&= (-1)^{kl} \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\sigma\tau \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \eta(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(l)}) \omega(v_{\sigma\tau(l+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(l+k)}) \\
&= (-1)^{kl} \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\sigma\tau \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \eta \otimes \omega(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(k)}, v_{\sigma\tau(k+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(k+l)}) \\
&= (-1)^{kl} \frac{(k+l)!}{k!\, l!} \operatorname{Alt}(\eta \otimes \omega)(v_1, \ldots, v_{k+l}) \\
&= (-1)^{kl} \eta \wedge \omega(v_1, \ldots, v_{k+l}).
\end{aligned}
$$

así $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$.

5. Por Lema 7.24

$$
\begin{aligned}
(\omega \wedge \eta) \wedge \theta &= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!\, m!} \operatorname{Alt}\left((\omega \wedge \eta) \otimes \theta\right) \\
&= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!\, m!} \operatorname{Alt}\left(\frac{(k+l)!}{k!\, l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta\right) \\
&= \frac{(k+l+m)!}{k!\, l!\, m!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)
\end{aligned}
$$

Similarmente obtenemos $\omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(k+l+m)!}{k!\, l!\, m!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$.

$\square$

Observación 7.26. Suponga que $\operatorname{char}(K) \neq 2$ y que λ es un 1-tensor, entonces por Propiedad 7.25 4.

$$\lambda \wedge \lambda = 0.$$

De hecho $\lambda \wedge \lambda = -\lambda \wedge \lambda$ luego $2\lambda \wedge \lambda = 0$ y como $2 \neq 0$ tenemos $\lambda \wedge \lambda = 0$. Además si λ_1, λ_2 son 1-tensores entonces por definición

$$\lambda_1 \wedge \lambda_2 = \lambda_1 \otimes \lambda_2 - \lambda_2 \otimes \lambda_1,$$

y en general para $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in T^1(V)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que si $\mathrm{char}(K) > 0$ entonces $k < \mathrm{char}(K)$,

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k = \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \lambda_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \lambda_{\sigma(k)}.$$

Proposición 7.27. *Sea $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ y $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Para todo $\omega \in \Lambda^k(W)$ y $\eta \in \Lambda^l(W)$ tenemos*

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta.$$

Dem. La demostración es una verificación inmediata. □

Notación 7.28. Por Propiedad 7.25 5. denotamos $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge \eta \wedge \theta$ y así podemos definir producto exterior de más de dos tensores alternantes.

Corolario 7.29. *Sean $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que si $\mathrm{char}(K) > 0$ entonces $k_1 + \ldots + k_r < \mathrm{char}(K)$ y $\omega_i \in \Lambda^{k_i}(V)$, $i = 1, \ldots, r$, entonces*

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r = \frac{(k_1 + \ldots + k_r)!}{k_1! \cdots k_r!} \mathrm{Alt}(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_r).$$

Dem. Se sigue de inmediatamente de Propiedad 7.25 5. por inducción en r. □

Ejemplo 7.30. Sea $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base canónica de K^n y $\{f_1, \ldots, f_n\}$ la base dual.

1. Para $\mathrm{char}(K) > 0$ suponga que $n < \mathrm{char}(K)$. Como $\mathrm{Alt}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \frac{1}{n!} \det$ entonces
$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_n = \det.$$

2. Sea $k \in \{1, \ldots, n\}$ y $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$. Para $\mathrm{char}(K) > 0$ suponga que $k < \mathrm{char}(K)$. Como $\mathrm{Alt}(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}) = \frac{1}{k!} \det_{i_1 \ldots i_k}$ entonces
$$f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k} = \det_{i_1 \ldots i_k}.$$

Teorema 7.31. *Suponga que $\mathrm{char}(K) \neq 2$ y $\dim_K(V) = n < \infty$. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ la base dual. Sea $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que si $\mathrm{char}(K) > 0$ entonces $k < \mathrm{char}(K)$. La colección de k-tensores*

$$\left\{\lambda_{i_1} \wedge \cdots \wedge \lambda_{i_k}\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$$

es una base de $\Lambda^k(V)$. En particular

$$\dim_K\left(\Lambda^k(V)\right) = \binom{n}{k}.$$

Dem. Sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $\omega \in \Lambda^k(V)$, como $\omega \in T^k(V)$ y $\left\{\lambda_{i_1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{i_k}\right\}_{i_1,\ldots,i_k=1}^n$ es un base de $T^k(V)$ entonces

$$\omega = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} c_{j_1\ldots j_k}\lambda_{j_1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{j_k}$$

con $c_{j_1\ldots j_k} \in K$. Así

$$\begin{aligned}\omega &= \operatorname{Alt}(\omega)\\ &= \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} c_{j_1\ldots j_k} \operatorname{Alt}(\lambda_{j_1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{j_k})\\ &= \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} c_{j_1\ldots j_k} k!\lambda_{j_1} \wedge \cdots \wedge \lambda_{j_k}.\end{aligned}$$

Ahora, dados $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$ por Propiedad 7.25 4. y Observación 7.26, si dos de los subindices j_i coinciden entonces $\lambda_{j_1} \wedge \cdots \wedge \lambda_{j_k} = 0$, luego podemos asumir que son todos distintos; en tal caso $\lambda_{j_1} \wedge \cdots \wedge \lambda_{j_k} = \operatorname{sgn}(\sigma_{j_1,\ldots,j_k})\lambda_{i_1} \wedge \cdots \wedge \lambda_{i_k}$ donde $i_1 < \ldots < i_k$ son los mismos subindices $j_1, \ldots, j_k$ ordenados en forma creciente y $\sigma_{j_1,\ldots,j_k} \in S_k$ es la permutación que reorganiza los $j_1, \ldots, j_k$. Luego

$$\omega = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} a_{i_1,\ldots,i_k}\lambda_{i_1} \wedge \cdots \wedge \lambda_{i_k}$$

con $a_{i_1,\ldots,i_k} = k! \sum_{\sigma\in S_k} c_{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(k)}}$, y así $\Lambda^k(V) = \langle \lambda_{i_1} \wedge \cdots \wedge \lambda_{i_k}\rangle_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}$.

Para establecer la independencia lineal, note que si $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ y $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$ entonces (ver Ejemplo 7.30 2.)

$$\lambda_{i_1} \wedge \cdots \wedge \lambda_{i_k}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 = j_1, \ldots, i_k = j_k \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

luego si $0 = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} a_{i_1,\ldots,i_k}\lambda_{i_1} \wedge \cdots \wedge \lambda_{i_k}$ entonces

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} a_{i_1,\ldots,i_k}\lambda_{i_1} \wedge \cdots \wedge \lambda_{i_k}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})\\ &= a_{j_1,\ldots,j_k}.\end{aligned}$$

□

7.3. (l, k)-Tensores

En esta sección asumiremos que V tienen dimensión finita.

Definición 7.32. Sean $l, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Un (l, k)-*tensor* es una función multilineal:

$$T^{(l,k)} : (V^*)^l \times V^k = \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l-\text{veces}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-\text{veces}} \longrightarrow K.$$

Al espacio de (l, k)-tensores lo denotamos $T^{(l,k)}(V)$ ó $T^l_k(V)$.

Notación 7.33. Como V tiene dimensión finita, por Teorema 3.10 tenemos $V \simeq (V^*)^*$ canónicamente, en particular todo $v \in V$ lo identificaremos con el $(1,0)$-tensor

$$\begin{aligned} \widehat{v} : V^* &\longrightarrow K \\ \lambda &\longmapsto \lambda(v) \end{aligned}$$

y $T^(1,0)(V) \simeq V$ canónicamente.

Definición 7.34. Sean $l_1, l_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $S \in T^{(l_1,k_1)}(V)$ y $T \in T^{(l_2,k_2)}(V)$ definimos su *producto tensorial* $S \otimes T \in T^{(l_1+l_2,k_1+k_2)}(V)$ por

$$\begin{aligned} &S \otimes T(\lambda_1, \ldots, \lambda_{l_1+l_2}, v_1, \ldots, v_{k_1+k_2}) \\ &= S(\lambda_1, \ldots, \lambda_{l_1}, v_1, \ldots, v_{k_1}) T(\lambda_{l_1+1}, \ldots, \lambda_{l_1+l_2}, v_{k_1+1}, \ldots, v_{k_1+k_2}) \end{aligned}$$

para todo $\lambda_1, \ldots, \lambda_{l_1+l_2} \in V^*$, $v_1, \ldots, v_{k_1+k_2} \in V$.

Propiedad 7.35. *El producto tensorial es bilineal y asociativo. Es decir, dados* $l_1, l_2, l_3, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *y* $S, S' \in T^{(l_1,k_1)}(V)$, $T, T' \in T^{(l_2,k_2)}(V)$, $U \in T^{(l_3,k_3)}(V)$, $c \in K$ *tenemos:*

1. $(S + S') \otimes T = S \otimes T + S' \otimes T$,
2. $S \otimes (T + T') = S \otimes T + S \otimes T'$,
3. $(cS) \otimes T = c(S \otimes T) = S \otimes (cT)$,
4. $(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U)$.

Dem. La demostración es una verificación directa. □

Notación 7.36. Por la Proposición 7.35 4. denotamos $S \otimes T \otimes U = (S \otimes T) \otimes U$ y así podemos definir producto tensorial de más de dos tensores.

Teorema 7.37. *Suponga que* $\dim_K(V) = n$. *Sea* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base de* V *y* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *la base dual. Para todo* $l, k \in \mathbb{Z}_{>0}$, *la colección de* (l,k)*-tensores*

$$\left\{ v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_l} \otimes \lambda_{j_1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{j_k} \right\}_{i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_k = 1}^{n}$$

es una base de $T^{(l,k)}(V)$. *En particular*

$$\dim_K \left(T^{(l,k)}(V) \right) = n^{(l+k)}.$$

Dem. Similar a la demostración de Teorema 7.10. Note que para todo $T \in T^{(l,k)}(V)$

$$T = \sum_{i_1, \ldots, i_l = 1}^{n} \sum_{j_1, \ldots, j_k = 1}^{n} T(\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_l}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_l} \otimes \lambda_{j_1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{j_k}.$$

□

Ejemplo 7.38. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de K^n y $\{f_1, \ldots, f_n\}$ la base dual.

1. Suponga que $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Para $n = 3$ sea $T_\times \in T^{(1,2)}(K^3)$ el tensor

$$T_\times = e_1 \otimes (f_2 \wedge f_3) - e_2 \otimes (f_1 \wedge f_3) + e_3 \otimes (f_1 \wedge f_2).$$

2. Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(K)$, y $T_A \in T^{(1,1)}(V)$ el tensor

$$T_A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_i \otimes f_j.$$

Definición 7.39. Suponga que $\dim_K(V) = n$. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ la base dual. Sea $l, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y

$$t = v_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes v_{\alpha_l} \otimes \lambda_{\beta_1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{\beta_k} \in T^{(l,k)}(V).$$

Dados $l', k' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tales que $l' \geq k$ y $k' \geq l$ definimos la *contracción por* t como la transformación lineal

$$\begin{array}{rcl} \widehat{t} : T^{(l',k')}(V) & \longrightarrow & T^{(l'-k,k'-l)}(V) \\ T & \longmapsto & T(t) := \widehat{t}(T) \end{array}$$

donde si

$$T = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_{l'}} \otimes \lambda_{j_1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{j_{k'}}$$

entonces

$$T(t) = \left(\prod_{s=1}^{k} \lambda_{\beta_s}(v_{i_s}) \prod_{s=1}^{l} \lambda_{j_s}(v_{\alpha_s}) \right) v_{i_{k+1}} \otimes \cdots \otimes v_{i_{l'}} \otimes \lambda_{j_{l+1}} \otimes \cdots \otimes \lambda_{j_{k'}}.$$

Extendemos linealmente a todo los (l,k)-tensores $t \in T^{(l,k)}(V)$ para obtener

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\bullet} : T^{(l,k)}(V) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_K\left(T^{(l',k')}(V), T^{(l'-k,k'-l)}(V) \right) \\ t & \longmapsto & \widehat{t} \end{array}$$

Observación 7.40. Note que

$$\left(\prod_{s=1}^{k} \lambda_{\beta_s}(v_{i_s}) \prod_{s=1}^{l} \lambda_{j_s}(v_{\alpha_s}) \right) = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k} \otimes \lambda_{j_1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{j_l}(v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_l}, \lambda_{\beta_1}, \ldots, \lambda_{\beta_k}).$$

Ejemplo 7.41. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de K^n y $\{f_1, \ldots, f_n\}$ la base dual.

1. Sea $T_\times \in T^{(1,2)}(K^3)$ como en Ejemplo 7.38 1., y
$$v_1 = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i, \quad v_2 = \sum_{i=1}^{3} b_i e_i$$
con $a_i, b_i \in K$, $i = 1, \ldots, 3$. Entonces $v_1 \otimes v_2 \in T^{(2,0)}(K^3)$ y $T_\times(v_1 \otimes v_2) \in T^{(1,0)}(K^3) \simeq K^3$ con
$$\begin{aligned} T_\times(v_1 \otimes v_2) &= (f_2 \wedge f_3)(v_1, v_2)e_1 - (f_1 \wedge f_3)(v_1, v_2)e_2 + (f_1 \wedge f_2)(v_1, v_2)e_3 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)e_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1)e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)e_3 \\ &=: v_1 \times v_2 \end{aligned}$$

2. Sea $T_A \in T^{(1,1)}(K^n)$ como en Ejemplo 7.38 2. y
$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$$
con $c_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces $T_A(v) \in T^{(1,0)}(K^n) \simeq K^n$ con
$$\begin{aligned} T_A(v) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_j(v) e_i \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} c_j e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \right) e_i \\ &= f_A(v) \end{aligned}$$
donde $f_A \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^n)$ está definida por $f_A(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$.

3. Sea $T_A T^{(1,1)}(K^n)$ como en Ejemplo 7.38 2. y
$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} d_j f_j$$
con $d_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces $T_A(\lambda) \in T^{(0,1)}(K^n) \simeq (K^n)^*$ con
$$\begin{aligned} T_A(\lambda) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \lambda(e_i) f_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} d_i f_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} d_i \right) f_j \\ &= f_A^*(\lambda) \end{aligned}$$

donde $f_A \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^n)$ está definida por $f_A(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$.

7.4. Convenciones en notación de tensores

En esta sección asumiremos que V tienen dimensión finita.

Notación 7.42. En esta sección usaremos las siguientes convenciones.

1. Los elementos de V los denotaremos con subíndices.
2. Los elementos de V^* los denotaremos con superíndices.
3. Al espacio de (l,k)-tensores lo denotaremos por $T_k^l(V)$.
4. Convención de Einstein: si un indice se repite como subíndice y superíndice se asume sumatoria sobre este.

Ejemplo 7.43. Sea $n = \dim(V)$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\{\lambda^1, \ldots, \lambda^n\}$ la base dual.

1. Dado $v \in V$ y $\lambda \in V^*$ si denotamos
$$\begin{aligned} v^i &= \lambda^i(v) \\ \lambda_i &= \lambda(v_i) \end{aligned}$$
entonces
$$\begin{aligned} v &= v^i v_i \\ \lambda &= \lambda_i \lambda^i \end{aligned}$$
2. Dado $T \in T_k^l(V)$ si denotamos
$$T^{i_1 \ldots i_l}_{j_1 \ldots j_k} = T(\lambda^{i_1}, \ldots, \lambda^{i_l}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})$$
entonces
$$T = T^{i_1 \ldots i_l}_{j_1 \ldots j_k} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_l} \otimes \lambda^{j_1} \otimes \cdots \otimes \lambda^{j_k}$$
3. Dado $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ si denotamos
$$f^i_j = \lambda^i(f(v_j))$$
entonces el tensor $T_f = f^i_j v_i \otimes \lambda^j \in T_1^1(V)$ es tal que
$$\begin{aligned} T_f(v) &= f^i_j \left(v_i \otimes \lambda^j\right)(v) \\ &= f^i_j \lambda^j(v) v_i \\ &= f^i_j v^j v_i \\ &= f(v) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T_f(\lambda) &= f^i_j \left(v_i \otimes \lambda^j\right)(\lambda) \\ &= f^i_j \lambda(v_i)\lambda^j \\ &= f^i_j \lambda_i \lambda^j \\ &= f^*(\lambda) \end{aligned}$$

Apéndice A

Cuerpos

Definición A.1. Un *cuerpo* K es un conjunto con dos operaciones $+$ y $\cdot$ (e.d. funciones $K \times K \to K$), que llamamos respectivamente *suma* y *multiplicación*, y dos elementos distintos $0, 1 \in K$, que llamamos respectivamente *cero* y *uno*, los cuales satisfacen las siguientes propiedades para todo $a, b, c \in K$:

1. *commutatividad*: $a + b = b + a$; y, $a \cdot b = b \cdot a$;

2. *asociatividad*: $a + (b + c) = (a + b) + c$; y, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

3. *neutralidad de* 0 *y* 1: $0 + a = a$; y, $1 \cdot a = a$;

4. *existencia de opuesto y de inverso*: Existe $d \in K$ tal que $a + d = 0$ y, si $a \neq 0$, existe $e \in K$ tal que $a \cdot e = 1$.

5. *distributividad del producto sobre la suma*: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Notación A.2. Es usual omitir el símbolo $\cdot$ en la operación de multiplicación, de tal forma que $a \cdot b$ se denota también por ab.

Ejemplo A.3. Los siguientes conjuntos junto con sus respectivas operaciones son cuerpos.

1. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con sus operaciones usuales de suma y multiplicación.

2. El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ con sus operaciones usuales de suma y multiplicación.

3. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ con sus operaciones usuales de suma y multiplicación.

4. El subconjunto de los números reales $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, el cual es formado por los números de la forma $a+b\sqrt{2}$ donde $a, b \in \mathbb{Q}$, con las operaciones heredadas de $\mathbb{R}$.

5. El subconjunto de los números complejos $\mathbb{Q}[i]$, el cual es formado por los números de la forma $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{Q}$, con las operaciones heredadas de $\mathbb{C}$.

6. El conjunto de clases de equivalencia módulo p en los números enteros $\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}_p$, donde p es un número primo, con las operaciones heredadas de las operaciones usuales de suma y multiplicación de $\mathbb{Z}$.

Ejemplo A.4. Los siguientes conjuntos no son cuerpos.

1. El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ con sus operaciones usuales, pues los elementos diferentes de 0 no tienen opuesto.

2. El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con sus operaciones usuales, pues los elementos diferentes de 0, aparte de -1 y de 1 no tienen inverso.

Proposición A.5 (Ley de cancelación)**.** *Sea K un cuerpo y sean $a, b, c \in K$, si $a + b = c + b$ ó si $b \neq 0$ y $ab = cb$, entonces $a = c$.*

Dem. Basta con sumar el opuesto de b a ambos lados de la igualdad en el caso de la suma, o multiplicar por el inverso de b en el caso de la multiplicación. □

Proposición A.6 (Unicidad de 0, 1, del opuesto y del inverso)**.** *Sea K un cuerpo, entonces los elementos neutros de la suma y de la multiplicación son únicos, al igual que opuestos e inversos.*

Dem. Si $e \in K$ es tal que $a + e = a$ para todo $a \in K$, por la neutralidad de 0 tenemos que $a + 0 = a = a + e$. La ley de cancelación implica que $0 = e$. Similarmente, se puede verificar la unicidad de 1 como neutro de la multiplicación. Para verificar la unicidad del opuesto, observe que si $a \in K$ y $b, c \in K$ son tales que $a + b = 0 = a + c$, la Ley de cancelación implica que $b = c$. Similarmente se establece la unicidad del inverso, cuando este existe. □

Notación A.7. Dada la unicidad de opuestos e inversos, los llamaremos el opuesto de a y el inverso de b, respectivamente d y e en Definición A.1.4, que se denotarán respectivamente por $-a$ y por b^{-1} ó $1/b$. En particular $-(-a) = a$. También se denota la operación $a + (-b)$ por $a - b$ y $a \cdot b^{-1}$ por $\frac{a}{b}$.

Propiedad A.8. *Sea K un cuerpo, y sean $a, b \in K$, entonces:*

1. $a \cdot 0 = 0$*;*

2. $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$*; y,*

3. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$*.*

Dem.

1. Tenemos $0 = 0 + 0$ y $0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$. Así
$$0 + a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0,$$
luego por Ley de cancelación $0 = a \cdot 0$.

2. Por unicidad del opuesto basta verificar que $(-a)b$ y $a(-b)$ son el opuesto de ab. Pero,
$$0 = 0 \cdot b = (a + (-a))\, b = ab + (-a)b$$
de donde $(-a)b$ es el opuesto de ab. Similarmente se establece $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

3. Usando la igualdad $-(-b) = b$ y la propiedad 2:
$$(-a)(-b) = a\,(-(-b)) = ab$$

□

Definición A.9. Sea K un cuerpo, si existe un número natural k tal que
$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{k \text{ sumandos}} = 0$$
al mínimo entre estos lo llamamos la *característica* de K y los denotamos $\mathrm{char}(K)$. En caso de que no existe tal k, decimos que la característica de K es 0 y lo denotamos $\mathrm{char}(K) = 0$.

Ejemplo A.10. La característica de $\mathbb{F}_p$ es p y las de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ son todas iguales 0.

Definición A.11. Sea K un cuerpo. Si K es tal que para cualquier polinomio
$$p(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0, \quad a_n, \ldots, a_1, a_0 \in K$$
existe $c \in K$ tal que $p(c) = 0$, decimos que K es *algebraicamente cerrado.*

Teorema A.12 (Teorema fundamental del álgebra)**.** *El cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado.*

Polinomios con coeficientes en un cuerpo

Definición A.13. Al conjunto de polinomios con coeficientes en K en la variable t lo denotamos por $K[t]$. Si $P(t) \in K[t]$ es tal que
$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$
con $a_n \neq 0$, decimos que el *grado de* $P(t)$ es n, que denotamos por $\deg(P(t)) = n$ y llamamos a a_n *coeficiente líder*. El caso $P(t) = 0$, escribimos $\deg(P(t)) = -\infty$ y convenimos que $-\infty < n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Dado otro polinomio $Q(t) = b_m t^m + \ldots + b_1 t + b_0$, el producto $R(t)$ de $Q(t)$ y $P(t)$ está definido por
$$R(t) = Q(t)P(t) = \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j=0}^{i} b_i a_{i-j} \right) t^i.$$

Observación A.14. Sean $P(t), Q(t) \in K[t]$, entonces

$$\deg(P(t)+Q(t)) \leq \text{máx}\{\deg(P(t)), \deg(Q(t))\},$$

si $\deg(P(t)) \neq \deg(Q(t))$

$$\deg(P(t)+Q(t)) = \text{máx}\{\deg(P(t)), \deg(Q(t))\},$$

y si $Q(t) \neq 0$

$$\deg(P(t)Q(t)) = \deg(P(t)) + \deg(Q(t)) > \deg(P(t));$$

Teorema A.15 (Algoritmo de la división)**.** *Sean $P(t), Q(t) \in K[t]$, con $Q(t) \neq 0$, entonces existen únicos $S(t), R(t) \in K[t]$ tales que*

$$P(t) = S(t)Q(t) + R(t), \ \ y \ \deg(R(t)) < \deg(Q(t))$$

Dem. Sea $N = \{P(t) - T(t)Q(t)\}_{T(t)\in K[t]}$. Como $N \neq \emptyset$ y $\deg(N) \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$, existe $R(t) = P(t) - S(t)Q(t) \in N$ de grado mínimo. Tenemos $\deg(R(t)) < \deg(Q(t))$, pues de lo contrario, si $a, b \in K$ son los respectivos coeficientes lider de $R(t)$ y $Q(t)$, el polinomio

$$R(t) - \frac{b}{a}t^{\deg(R(t))-\deg(Q(t))}Q(t) = P(t) - \left(S(t) + \frac{b}{a}t^{\deg(R(t))-\deg(Q(t))}\right)Q(t)$$

tendría grado menor que $R(t)$, contradiciendo su minimalidad. Para establecer la unicidad de $S(t)$ y $R(t)$, asumimos que existen $S'(t), R'(t) \in K[t]$ tales que $P(t) = S'(t)Q(t) + R'(t)$ con $\deg(R'(t)) < \deg(Q(t))$. Entonces

$$(S(t) - S'(t))\,Q(t) = R'(t) - R(t),$$

y así como

$$\deg(R(t) - R'(t)) < \deg(Q(t)),$$

$S(t) - S'(t) = 0$ y $R(t) - R'(t) = 0$, es decir $R'(t) = R(t)$ y $S'(t) = S(t)$. □

Corolario A.16. *Sea $P(t) \in K[t]$ y $\lambda \in K$ tal que $P(\lambda) = 0$. Entonces existe $S(t) \in K[t]$, tal que $P(t) = (t-\lambda)S(t)$.*

Dem. Sea $Q(t) = t - \lambda$ y $S(t), R(t) \in K[t]$ como en el algoritmo de la división. En particular $\deg(R(t)) = 0$ es decir $R(t) = a$ para algún $a \in K$. Así $0 = P(\lambda) = (\lambda - \lambda)S(\lambda) + a = a$. □

Definición A.17. Sean $P(t), Q(t) \in K[t]$, decimos que $R(t) \in K[t]$ es un *máximo común divisor* de $P(t)$ y $Q(t)$ si

1. $R(t)$ divide a $P(t)$ y $Q(t)$, es decir existen $S_1(t), S_2(t) \in K[t]$ tales que

$$P(t) = S_1(t)R(t) \qquad Q(t) = S_2(t)R(t).$$

2. Si $R_0(t) \in K[t]$ divide a $P(t)$ y $Q(t)$, entonces $R_0(t)$ divide a $R(t)$.

Proposición A.18. *Dados $P(t), Q(t) \in K[t]$, con $P(t) \neq 0$ ó $Q(t) \neq 0$, existe un máximo común divisor $(P(t), Q(t)) = R(t) \in K[t]$. Mas aún, existen $P_0(t), Q_0(t) \in K[t]$ tales que $R(t) = Q_0(t)P(t) + P_0(t)Q(t)$.*

Dem. Sea

$$N = \left\{ Q_1(t)P(t) + P_1(t)Q(t) \in K[t] \;\middle|\; P_1(t), Q_1(t) \in K[t],\; Q_1(t)P(t) + P_1(t)Q(t) \neq 0 \right\}$$

Como $N \neq \emptyset$ y $\deg(N) \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$, existe $R(t) = Q_0(t)P(t) + P_0(t)Q(t) \in N$ de grado mínimo. Veamos que $R(t)$ es un máximo común divisor. De hecho, si $S(t), R_0(t) \in K[t]$ son tales que

$$P(t) = S(t)R(t) + R_0(t)$$

con $\deg(R_0(t)) < \deg(R(t))$,

$$R_0(t) = P(t) - S(t)R(t) = (1 - S(t)Q_0(t))\, P(t) - S(t)P_0(t)Q(t),$$

y así como $R(t)$ es mínimo en grado en N, $R_0(t) \notin N$, es decir $R_0(t) = 0$. Luego $R(t)$ divide a $P(t)$ y, por un argumento similar, $R(t)$ divide a $Q(t)$. Finalmente, si $R'(t) \in K[t]$ divide a $P(t)$ y $Q(t)$, es decir si existen $S_1'(t), S_2'(t) \in K[t]$ tales que

$$P(t) = S_1'(t)R'(t) \qquad Q(t) = S_2'(t)R'(t),$$

$R'[t]$ también divide a $R[t]$, pues

$$R(t) = Q_0(t)P(t) + P_0(t)Q(t) = (Q_0(t)S_1'(t) + P_0(t)S_2'(t))\, R'[t]$$

□

Notación A.19. Sean $P(t), Q(t) \in K[t]$, con $P(t) \neq 0$ y $Q(t) \neq 0$, al máximo común divisor de $P(t)$ y $Q(t)$ que es mónico, lo denotamos por $(P(t), Q(t))$.

Observación A.20. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ son distintos $(t - \lambda_1, t - \lambda_2) = 1$. De hecho

$$\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left((t - \lambda_1) - (t - \lambda_2)\right) = 1.$$

Propiedad A.21 (Algoritmo de Euclides)**.** *Sean $P(t), Q(t) \in K[t]$ y $S(t), R(t) \in K[t]$ tales que $P(t) = S(t)Q(t) + R(t)$ con $\deg(R(t)) < \deg(Q(t))$, entonces*

$$(P(t), Q(t)) = (Q(t), R(t))$$

Dem. Sea $R_0(t) = (P(t), Q(t))$, entonces si $P(t) = P_1(t)R_0(t)$ y $Q(t) = Q_1(t)R_0(t)$, tenemos

$$R(t) = P(t) - S(t)Q(t) = (P_1(t) - S(t)Q_1(t))R_0(t)$$

luego $R_0(t)$ divide a $R(t)$. Como $R_0(t) = (P(t), Q(t))$, existe $P_0(t), Q_0(t) \in K[t]$ tales que

$$Q_0(t)P(t) + P_0(t)Q(t) = R_0(t).$$

Ahora, suponga que $R_1(t)$ divide a $Q(t)$ y a $R(t)$, entonces si $Q(t) = Q_2(t)R_1(t)$ y $R(t) = R_2(t)R_1(t)$, para todo $P_0(t), Q_0(t) \in K[t]$ tenemos

$$\begin{aligned} R_0(t) &= Q_0(t)P(t) + P_0(t)Q(t) \\ &= Q_0(t)\big(S(t)Q(t) + R(t)\big) + P_0(t)Q(t) \\ &= \Big(Q_0(t)\big(S(t) + P_0(t)\big)Q_2(t) + Q_0(t)R_2(t)\Big)R_1(t) \end{aligned}$$

luego $R_1(t)$ divide a $Q_0(t)P(t) + P_0(t)Q(t)$ en particular $R_1(t)$ divide a $R_0(t) = (P(t), Q(t))$ y así $R_0(t) = (Q(t), R(t))$.

Ejemplo A.22. Considere los polinomios $P(t) = t^3 + t^2 - t - 1$ y $Q(t) = t^3 - t^2$ en $\mathbb{Q}[t]$, tenemos

$$\begin{aligned} P(t) &= Q(t) + 2t^2 - t - 1 \\ Q(t) &= \Big(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\Big)(2t^2 - t - 1) + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4} \\ 2t^2 - t - 1 &= (8t + 4)\Big(\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\Big) \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} (P(t), Q(t)) &= (Q(t), 2t^2 - t - 1) \\ &= (2t^2 - t - 1, \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}) \\ &= (\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}, 0) \\ &= t - 1. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} t - 1 &= 4Q(t) - (2t - 1)(2t^2 - t - 1) \\ &= 4Q(t) - (2t - 1)\big(P(t) - Q(t)\big) \\ &= (2t - 1)P(t) + (2t + 3)Q(t) \end{aligned}$$

Observación A.23. Similarmente a como definimos máximo común divisor de un par de polinomios en $K[t]$, podemos definir *máximo común divisor de una familia finita de polinomios.* Si denotamos al máximo común divisor de $\{P_1(t), \ldots, P_n(t)\}$ que es mónico por $(P_1(t), \ldots, P_n(t))$, tenemos que

$$(P_1(t), \ldots, P_n(t)) = \Big(\,(P_1(t), \ldots, P_{n-1}(t))\,, P_n(t)\Big).$$

Propiedad A.24 (Relación de Bezout)**.** *Sean $P_1(t), \ldots, P_n(t) \in K[t]$, entonces existen polinomios $Q_1(t), \ldots, Q_n(t) \in K[t]$ tales que*

$$Q_1(t)P_1(t) + \ldots + Q_n(t)P_n(t) = (P_1(t), \ldots, P_n(t))$$

Dem. Hacemos inducción en n, siendo $n = 2$ el caso base ya demostrado. Para obtener el paso inductivo, si $R_1(t), \ldots, R_{n-1}(t) \in K[t]$ son tales que

$$R_1(t)P_1(t) + \ldots + Q_{n-1}(t)R_{n-1}(t) = (P_1(t), \ldots, P_{n-1}(t))\,;$$

y, por el caso base, $Q(t), Q_n(t) \in K[t]$ tales que

$$Q(t)\,(P_1(t), \ldots, P_{n-1}(t)) + Q_n(t)P_n(t) = \Big(\,(P_1(t), \ldots, P_{n-1}(t))\,, P_n(t)\Big),$$

definimos $Q_i(t) = Q(t)R_i(t)$, $i = 1, \ldots, n-1$, para obtener

$$\begin{aligned} Q_1(t)P_1(t) + \ldots + Q_n(t)P_n(t) &= \Big(\,(P_1(t), \ldots, P_{n-1}(t))\,, P_n(t)\Big) \\ &= (P_1(t), \ldots, P_n(t)) \end{aligned}$$

□

Ejemplo A.25. Considere los polinomios $P(t) = t^3 + t^2 - t - 1$, $Q(t) = t^3 - t^2$ y $R(t) = t^2 + t$ en $\mathbb{Q}[t]$, tenemos

$$\Big(P(t), Q(t), R(t)\Big) = \Big(\big(P(t), Q(t)\big), R(t)\Big) = \big(t - 1, R(t)\big),$$

ahora

$$\begin{aligned} R(t) &= t(t-1) + 2t \\ t - 1 &= \frac{1}{2}(2t) - 1 \\ 2t &= (-2t)(-1) + 0 \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} (R(t), t-1) &= (t-1, 2t) \\ &= (2t, -1) \\ &= (-1, 0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2}(2t) - (t-1) \\ &= \frac{1}{2}(R(t) - t(t-1)) - (t-1) \\ &= \frac{1}{2}R(t) - (\frac{1}{2}t + 1)(t-1) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2}R(t) - (\frac{1}{2}t + 1)\big((2t-1)P(t) + (2t+3)Q(t)\big) \\ &= -(\frac{1}{2}t + 1)(2t-1)P(t) - (\frac{1}{2}t + 1)(2t+3)Q(t) + \frac{1}{2}R(t). \end{aligned}$$

Definición A.26. Sea $P(t) \in \mathbb{K}[t]$, decimos que $P(t)$ es un polinomio irreducible si $P(t) = S(t)Q(t)$ con $S(t), Q(t) \in K[t]$ implica que $\deg(S(t)) = 0$ o $deg(Q(t)) = 0$ (e.d. $S(t) = c$ ó $Q(t) = c$ para algún $c \in K$, $c \neq 0$).

Lema A.27. *Sean $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ un polinomio irreducible y $R(t), S(t) \in K[t]$ tales que $P(t)$ divide a $R(t)S(t)$, entonces $P(t)$ divide a $R(t)$ o a $S(t)$.*

Dem. Sea $Q(t)$ tal que $P(t)Q(t) = R(t)S(t)$. Suponga que $P(t)$ no divide a $R(t)$. Como $P(t)$ es irreducible tenemos que $(P(t), R(t)) = 1$. Sean $R_0(t), P_0(t) \in K[t]$ tales que $1 = R_0(t)P(t) + P_0(t)R(t)$. Entonces

$$\begin{aligned} S(t) &= (R_0(t)P(t) + P_0(t)R(t))S(t) \\ &= R_0(t)P(t)S(t) + P_0(t)R(t)S(t) \\ &= R_0(t)P(t)S(t) + P_0(t)P(t)Q(t) \\ &= P(t)\left(R_0(t)S(t) + P_0(t)Q(t)\right) \end{aligned}$$

luego $P(t)$ divide a $S(t)$.

Teorema A.28 (Factorización única)**.** *Sea $P(t) \in K[t]$, con $\deg(P(t)) > 0$, entonces existen polinomios irreducibles $P_1(t), \ldots, P_n(t) \in K[t]$ tales que*

$$P(t) = P_1(t) \cdots P_n(t).$$

Más aún esta factorización es única en el siguiente sentido: si

$$P(t) = Q_1(t) \cdots Q_m(t)$$

con $Q_1(t), \ldots, Q_m(t) \in K[t]$ irreducibles, entonces $m = n$ y existe una biyectic-ción σ de $\{1, \ldots, n\}$ tal que $Q_i(t) = c_i P_{\sigma(i)}(t)$ para algún $c_i \in K$.

Dem. Por inducción en $\deg(P(t))$, siendo el caso base $\deg(P(t)) = 1$ evidente pues en tal caso $P(t)$ es irreducible. Suponga que la factorización por irreducibles ha sido demostrada para polinomios de grado $< d$ y sea $P(t) \in K[t]$ tal que $\deg(P(t)) = d$. Si $P(t)$ es irreducible no hay nada que demostrar. Suponga entonces que existen $S(t), Q(t) \in K[t]$ tales que $P(t) = S(t)Q(t)$ y $\deg(S(t)) > 0$ y $deg(Q(t)) > 0$. En particular tenemos $\deg(S(t)) < d$ y $\deg(Q(t)) < d$. Por hipótesis de inducción existen polinomios irreducibles

$$P_1(t), \ldots, P_{n_1}(t), P_{n_1+1}(t), \ldots, P_{n_1+n_2}(t) \in K[t]$$

tales que

$$S(t) = P_1(t) \cdots P_{n_1}(t) \quad \text{y} \quad Q(t) = P_{n_1+1}(t) \cdots P_{n_1+n_2}(t).$$

Así $P(t) = P_1(t) \cdots P_{n_1+n_2}(t)$.
Para establecer la unicidad de la factorización procedemos por inducción en el número de factores, siendo el caso base de un único factor inmediato pues en tal caso $P(t)$ es irreducible. Asuma por inducción que la unicidad ha sido demostrada cuando el número de factores es $< n$. Si $P(t) = P_1(t) \cdots P_n(t) =$

$Q_1(t)\cdots Q_m(t)$ entonces el lema anterior implica que $P_n(t)$ divide a algún $Q_i(t)$, que podemos asumir sin pérdida de generalidad que es $Q_m(t)$. Pero como $Q_m(t)$ es irreducible entonces $Q_m(t) = cP_m(t)$ para algún $c \in K$ con $c \neq 0$. Tenemos así $cP_1(t)\cdots P_{n-1}(t) = Q_1(t)\cdots Q_{m-1}(t)$, y como $cP_1(t)$ es irreducible, aplicamos la hipótesis de inducción para ver que $n-1 = m-1$, luego $n = m$, y existe una biyección σ_0 de $\{1,\ldots,n-1\}$, tome σ la biyección definida por $\sigma(i) = \sigma_0(i)$ para $1 \leq i \leq n-1$, $\sigma(n) = n$.

Teorema A.29. *Si $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ es un polinomio mónico irreducible entonces $P(t) = t - a$, con $a \in \mathbb{R}$, ó $P(t) = (t-a)^2 + b^2$, con $a, b \in \mathbb{R}$.*

Dem. Sea $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ un polinomio mónico irreducible. Por el teorema fundamental del álgebra $P(t)$ tiene una raíz $w = a + bi$ en $\mathbb{C}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Si w es un número real, es decir $b = 0$ y $w = a$ entonces $t - a$ divide a $P(t)$ y como $P(t)$ es mónico, $P(t) = t - a$. De lo contrario $w = a + bi$ con $b \neq 0$, y en tal caso $\overline{w} = a - bi$ también es una raíz de $P(t)$. Luego $t - w$ y $t - \overline{w}$ dividen a $P(t)$ en $\mathbb{C}[t]$. En particular $(t-w)(t-\overline{w}) = (t-a)^2 + b^2 \in \mathbb{R}[t]$ también divide a $P(t)$ y como $P(t)$ es mónico, $P(t) = (t-a)^2 + b^2$