FLUCTUACIONES DE LA INTERFASE PARA ECUACIONES ESTOCÁSTICAS

Resumen

La ecuación de Allen–Cahn

$$\partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u - (u^3 - u)$$

es una ecuación en derivadas parciales que tiene $u \equiv \pm 1$ como soluciones de equilibrio estables. Cuando se consideran condiciones iniciales que toman valores cercanos tanto a $+1$ como a -1 , las soluciones van a mostrar regiones con valores cercanos a $+1$ y -1 creciendo y decayendo la una a expensas de la otra.

Esta ecuación, así como la de Cahn–Hilliard, que resulta de la anterior tomando $-\Delta$ en el lado derecho, fueron propuestas como descripción de fenómenos asociados con la separación de fases (identificadas con ± 1) en aleaciones binarias de metales. En esta segunda ecuación, el extra laplaciano hace que se conserve la integral espacial total. Ellas también se presentan en otros contextos donde hay dos "fases" coexistiendo, e interesa la evolución en el tiempo de las regiones "ocupadas" por cada una de las fases.

Resulta natural considerar el comportamiento de estas ecuaciones cuando se agrega un término aleatorio cuya intensidad ϵ tiende a cero, ya que el sistema físico que se está modelando presenta fluctuaciones.

Como un primer paso en la descripción de fenómenos más complejos, se discute el comportamiento de las soluciones cuando la condición inicial es un frente estacionario, en el caso de dimensión espacial $d = 1$, cuando se suma a las ecuaciones un término estocástico dado por un ruido blanco espacio–tiempo. Este frente es un perfil que conecta las dos fases puras ± 1, y que se interpreta como una interfase en términos del sistema original.

Mostramos que, por tiempos que tienden a infinito como potencias inversas de ϵ, estos frentes mantienen la forma, pero su centro fluctúa de acuerdo con un proceso estocástico unidimensional que se describe precisamente en términos de las características de cada ecuación. En particular, la escala de tiempo en que se producen las fluctuaciones es significativamente menor que el lento movimiento del frente cuando el término estocástico es cero (caso determinístico).

Stella Brassesco
Departamento de Matemática
Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
`sbrasses@ivic.gob.ve`.

Referencias

[1] Bertini, L.,Brassesco, S. y Buttà, P. Front fluctuations for the stochastic Cahn-Hilliard equation. *Braz. J. Probab. Stat.* Volume 29, Number 2 (2015), 336-371.

[2] Brassesco, S., De Masi, A., and Presutti, E.. Brownian fluctuations of the interface in the D=1 Ginzburg-Landau equation with noise. *Annales de l'I.H.P. Probabilitès et statistiques* Vol **31.1** (1995), 81–118.

[3] Bricmont, J., Kupiainen, A. y Taskinen, J. Stability of Cahn-Hilliard fronts. *Comm. Pure Appl. Math.* Vol **52** (1999), 839–871.

[4] Carr, J. and Pego, R. L. (1989), Metastable patterns in solutions of $u_t = \epsilon^2 u_{xx} - f(u)$ *Comm. Pure Appl. Math.* Vol **42** : 523–576.