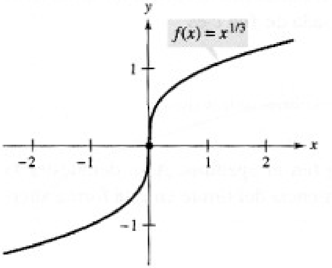
Funciones con Valores Escalares: Geometría, Límites y Continuidad

Alexander Cardona
Universidad de los Andes

Enero de 2018

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se representa como una curva en un plano:

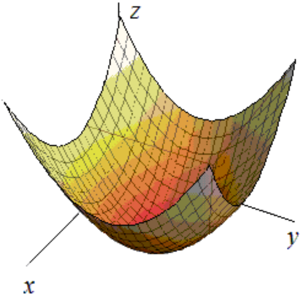


La curva es el subconjunto del plano que se escribe como

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) \text{ para } x \in \mathbb{R}\}.$$

Representación gráfica de una función con valores reales

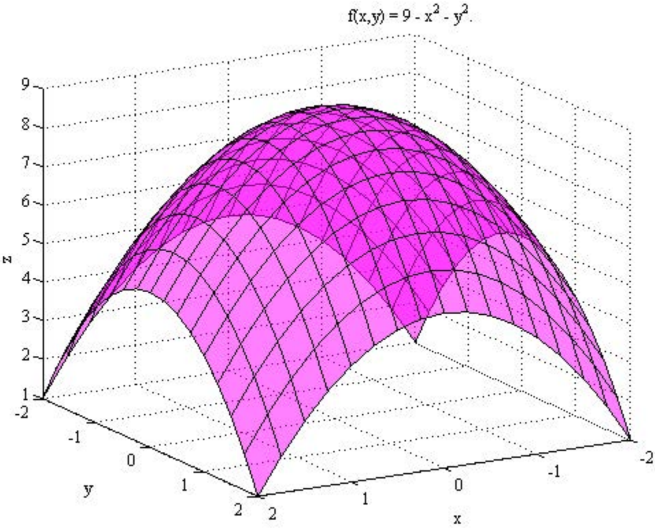
En forma análoga, una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se representa como una superficie en el espacio tridimensional:



La superficie es el subconjunto del espacio $\mathbb{R}^3$ que se escribe como:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y) \text{ para } (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Una superficie puede verse como una familia infinita de curvas:



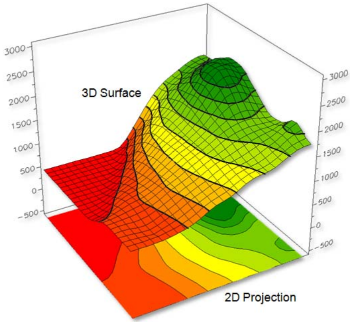
Identificar tales curvas es a menudo crucial para identificar la superficie.

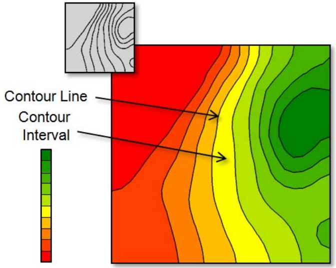
Conjuntos de Nivel

El comportamiento de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ puede entenderse a través de sus conjuntos de nivel:

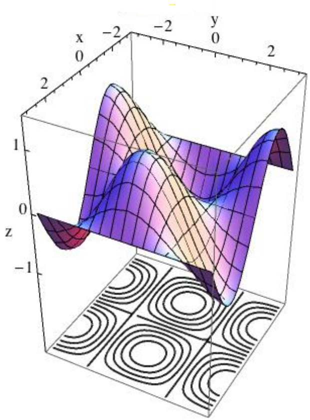
$$\mathrm{S}_k = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k\}\,.$$

En el caso de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ estos conjuntos de nivel definen curvas en el plano:





Un ejemplo en dos dimensiones:

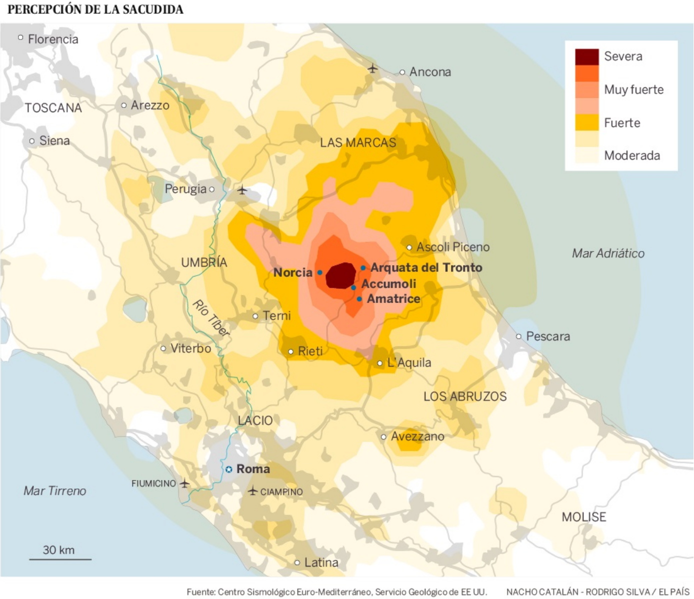


La figura a la izquierda ilustra las curvas de nivel de la función

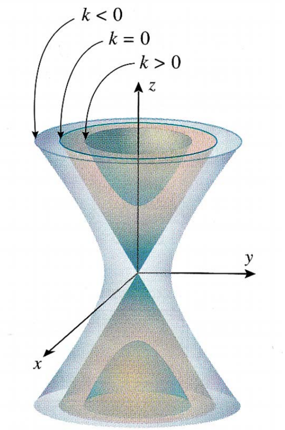
$$f(x, y) = \sin x \cos y,$$

es decir las curvas que corresponden a las ecuaciones $\sin x \cos y = k$ para k constante entre -1 y 1.

Un ejemplo de la vida real:



Un ejemplo en tres dimensiones:



En el caso de una función

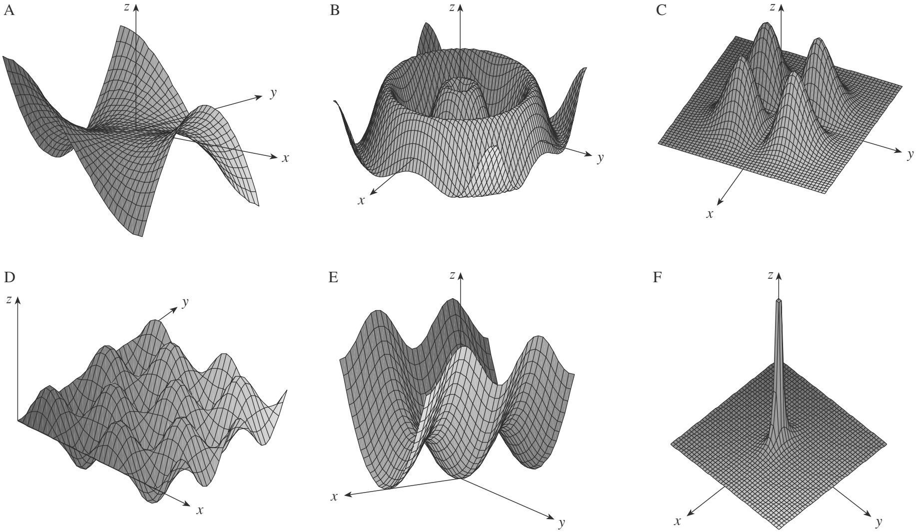
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

los conjuntos de nivel definen superficies en el espacio. Por ejemplo, la figura a la izquierda ilustra las superficies de nivel de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2,$$

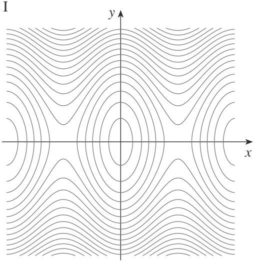
i.e. conjuntos solución de ecuaciones de la forma $x^2 + y^2 - z^2 = k$ para k constante, estas superficies son hiperboloides de uno o dos mantos, dependiendo del signo de k.

Un ejercicio: Observe las siguientes superficies

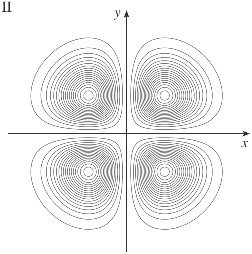


... Encuentre sus respectivas curvas de nivel

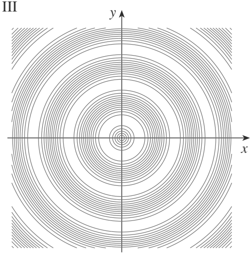
I



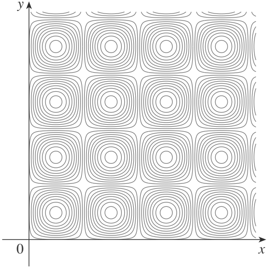
II



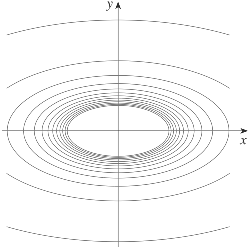
III



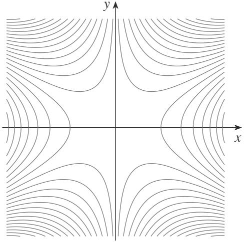
IV



V



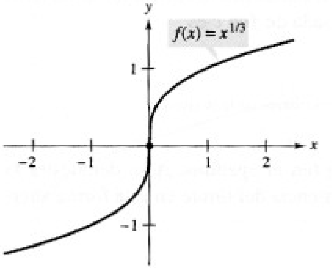
VI



Continuidad

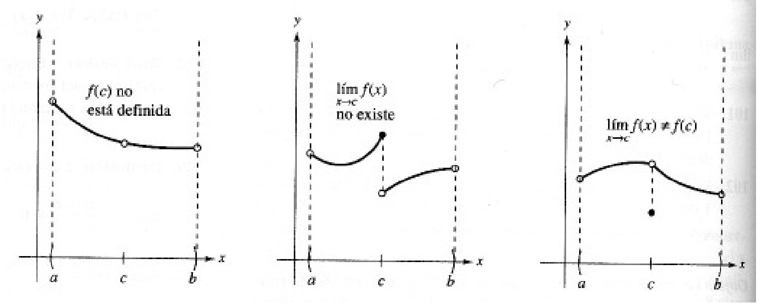
Una función $f(x)$ es llamada continua en un punto $p \in \mathbb{R}$ si

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

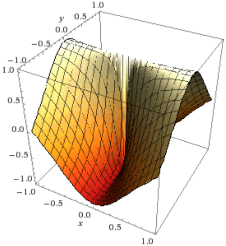


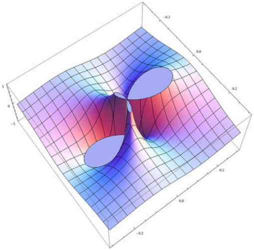
La figura a la izquierda ilustra una función continua en todo punto. La siguiente figura ilustra diferentes tipos de discontinuidad.

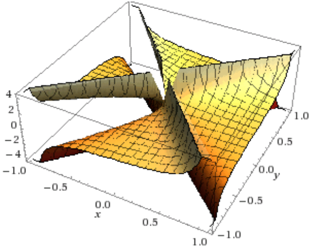
Discontinuidades

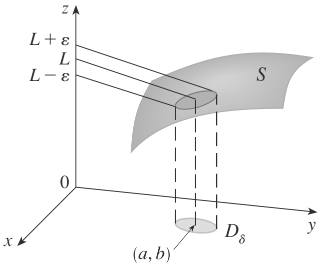


En dimensiones mayores las discontinuidades pueden como en los siguientes ejemplos:









Si $z = f(x, y)$ es una función, decimos que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

si, para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \epsilon$$

siempre que

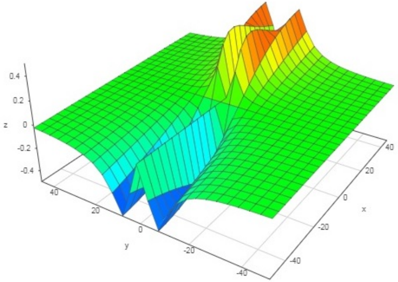
$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta.$$

Cuando un límite existe, es independiente del camino que se usa al calcularlo.

Por ejemplo, si
$z = f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

no existe.



Una función $f(x, y)$ es llamada continua en un punto $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ si

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x, y) = f(x_o, y_o).$$

Una función $f(x, y)$ es llamada continua en un punto $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ si

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x, y) = f(x_o, y_o).$$

Las reglas usuales del cálculo de límites en una dimensión se aplican idénticamente para límites en dimensiones superiores:

1. Si un límite existe debe ser único.

Límites y Continuidad en $\mathbb{R}^2$

Una función $f(x,y)$ es llamada continua en un punto $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ si

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = f(x_o,y_o).$$

Las reglas usuales del cálculo de límites en una dimensión se aplican idénticamente para límites en dimensiones superiores:

1. Si un límite existe debe ser único.
2. El límite de una suma, siempre que exista, es la suma de los límites correspondientes.

Límites y Continuidad en $\mathbb{R}^2$

Una función $f(x, y)$ es llamada continua en un punto $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ si

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x, y) = f(x_o, y_o).$$

Las reglas usuales del cálculo de límites en una dimensión se aplican idénticamente para límites en dimensiones superiores:

1. Si un límite existe debe ser único.
2. El límite de una suma, siempre que exista, es la suma de los límites correspondientes.
3. El límite de un producto, siempre que exista, es el producto de los límites correspondientes.

Una función $f(x, y)$ es llamada continua en un punto $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ si

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x, y) = f(x_o, y_o).$$

Las reglas usuales del cálculo de límites en una dimensión se aplican idénticamente para límites en dimensiones superiores:

1. Si un límite existe debe ser único.
2. El límite de una suma, siempre que exista, es la suma de los límites correspondientes.
3. El límite de un producto, siempre que exista, es el producto de los límites correspondientes.
4. En general, en cualquier dimensión, si $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), ..., f_n(\vec{x}))$, para $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} f(\vec{x}) = \vec{b}$ si y solo si $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} f_i(\vec{x}) = b_i$.