

# Geometría y Topología en Física Teórica

A. Cardona y A. Reyes

April 3, 2006

## Introducción

La geometría ha sido históricamente una herramienta fundamental para la descripción del mundo físico. Mediante técnicas geométricas podemos modelar y dar una imagen simple del funcionamiento de sistemas físicos en el contexto de teorías tan diversas como la mecánica analítica de Lagrange y Hamilton o la Relatividad General de Einstein. A finales del siglo diecinueve aparece una nueva herramienta que se adapta perfectamente a la descripción de ciertos fenómenos propios del dominio cuántico: la topología. Mientras la geometría estudia objetos que tienen que ver con propiedades *locales* de los espacios en los que está definida, por ejemplo su curvatura, en topología las características globales de ellos son el objeto de estudio. Un ejemplo de las propiedades topológicas de las superficies, por ejemplo, lo da la clasificación de éstas lograda mediante el estudio de curvas distintas -módulo deformaciones- sobre ellas: mientras cualquier par de curvas cerradas sobre la superficie de una esfera, con puntos inicial y final iguales, pueden ser deformadas la una en la otra, sobre la superficie de un toro (neumático) es claro que una curva ecuatorial y una completamente transversal a ella no poseen tal propiedad. Decimos entonces que es posible diferenciar topológicamente tales superficies, y para lograrlo suelen buscarse características numéricamente calculables que establezcan la correspondiente diferencia. Tales números son conocidos como invariantes topológicos, y uno de nuestros objetivos en las páginas que siguen es ilustrar su uso e interpretación en física teórica, especialmente en lo correspondiente a la descripción cuántica de ciertos fenómenos físicos, contrastándolo con lo que ocurre en física clásica, donde la relevancia de la geometría es primordial.

## 1 Geometría simpléctica y Mecánica clásica

A grandes rasgos podríamos decir que describir clásicamente un sistema físico es hacer geometría, y que diferentes tipos de geometría se adaptan perfectamente a los diferentes tipos de sistema y de descripción que pretendamos. Así, por ejemplo, en el caso de la Teoría General de la Relatividad, encontrar las curvas que describen la evolución de un cuerpo sometido a la interacción gravitacional con otros es lo mismo que encontrar las curvas que minimizan la longitud del

camino seguido por el cuerpo, pero midiendo tal longitud no con respecto a una métrica plana (euclídea) sino con una métrica que varía punto a punto (y de acuerdo con la distribución de masa) en el espacio-tiempo. Tal variación se interpreta físicamente diciendo que es la presencia de masa lo que altera la geometría del espacio-tiempo, es decir lo que lo curva.

Pensemos ahora en la descripción de la dinámica de un sistema formado por un número finito de partículas, el espacio cuya geometría describe la evolución dinámica del sistema es el espacio de fase, y tal evolución está determinada por las soluciones a las ecuaciones de Hamilton del sistema (una generalización de las leyes de Newton), que pueden verse también como las curvas integrales asociadas a un campo vectorial definido sobre el espacio de fases: el campo a lo largo del cual la forma “de área” asociada al sistema permanece constante. A continuación veremos en términos de qué geometría se formula tal descripción dinámica, y también cómo ella permite entender mejor el paso a la descripción cuántica del sistema e ilustrar la importancia de la topología del espacio de fases en cuestión en tal contexto.

**Dinámica Hamiltoniana.** Dado un sistema físico cuya configuración queda determinada por el valor en cada instante de  $N$  variables (en general cualquier conjunto de variables, no necesariamente coordenadas, e.g. temperaturas, potenciales,...), llamadas coordenadas generalizadas, el espacio de fase del sistema es el espacio de dimensión  $2N$  cuyas coordenadas contienen en las primeras  $N$  componentes dichas coordenadas generalizadas, y en las demás  $N$  sus correspondientes *momentos generalizados*, i.e. (un múltiplo de) las velocidades correspondientes a las  $N$  coordenadas generalizadas. Tanto el espacio de configuraciones del sistema como su espacio de fases tienen estructura de *variedad*, lo cual significa que vistos localmente (alrededor de cada punto) parecen ser espacios planos, pero en general no lo son globalmente; piénsese por ejemplo en la superficie de la tierra (que pareciera plana vista por pedazos, pero evidentemente no lo es). La dimensión del espacio de configuraciones representa el número de grados de libertad del sistema.

Para llevar a cabo una descripción física es necesario contar –aparte las coordenadas generalizadas que lo definen– con cierta información mínima sobre el sistema, y tal información está contenida en algunos tipos particulares de funciones. Primero, los observables físicos (energía, presión, etc) son descritos mediante funciones que a cada punto del espacio de fases del sistema asocian un número: el valor del correspondiente parámetro observado físicamente. En la descripción Hamiltoniana de la dinámica clásica de un sistema físico aparece una función en términos de la cual las ecuaciones de movimiento para el sistema pueden ser escritas. Tal función, llamada función Hamiltoniana, corresponde en sistemas de partículas a la diferencia entre los términos de energía cinética y potencial, y las *Ecuaciones de Hamilton*, que gobiernan la dinámica del sistema

en cuestión, son el conjunto de ecuaciones diferenciales dado por:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{y} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (1)$$

donde  $q_i$  y  $p_i$  son la coordenada y momento de la  $i$ -ésima partícula del sistema, respectivamente. Como se ha dicho anteriormente, las ecuaciones de Hamilton generalizan ampliamente la descripción newtoniana de la dinámica, pero lo más importante para nosotros ahora es ilustrar en qué sentido son *geométricas*, i.e. sus soluciones corresponden a cierto análogo de las curvas geodésicas que describen las curvas de evolución de un cuerpo en la relatividad general, pero ahora en una geometría construida a partir de elementos orientados de área, y no de línea, como en el caso Riemanniano. Además de su carácter intrínsecamente geométrico, la descripción Hamiltoniana ofrece –entre otras– gran facilidad para el estudio de la relación entre simetrías y leyes de conservación (a través del teorema de Noether, por ejemplo), y una visión apropiada para pasar a la correspondiente descripción cuántica (ver, e.g. [8]). Geométricamente un *espacio de fase* es una *variedad simpléctica*, lo que significa que su estructura geométrica viene dada por un objeto que permite medir áreas orientadas y permite definir una herramienta algebraica fundamental para la descripción física del sistema: el corchete de Poisson de dos observables físicos.

Sea  $M$  el espacio de fases de un sistema físico y llamemos  $C^\infty(M)$  el conjunto de observables clásicos del sistema, es decir funciones infinitamente diferenciables sobre  $M$  con valores reales. Queremos, dados dos observables físicos asociar a ellos un tercero mediante una operación

$$\{, \} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

llamada *Corchete de Poisson*, que a  $f$  y  $g$  asocia el observable definido como

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}. \quad (2)$$

El conjunto de observables del sistema, que es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación de funciones por escalares, queda dotado adicionalmente de una estructura de *álgebra de Lie* con esta operación, es decir que para  $f, g$  y  $h$  en  $C^\infty(M)$ , y  $\alpha, \beta$  escalares, se cumple que

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\} \\ \{\alpha f + \beta g, h\} &= \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\} \\ \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

El álgebra definida de esta forma es el *álgebra de Poisson* del sistema en cuestión, denotada  $(\mathcal{A}_o = C^\infty(M), \{, \})$ , y será el objeto algebraico fundamental para las construcciones que aquí pretendemos describir. Nótese que el álgebra  $C^\infty(M)$

es un álgebra *conmutativa* con respecto a la multiplicación usual de funciones reales, i.e.  $fg - gf = 0$ , para cualquier  $f, g \in C^\infty(M)$ . Sin embargo, no lo es con respecto al corchete de Poisson. Además, dado que para cualquier observable  $h$ ,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial h}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} = \{h, H\},$$

usando los corchetes de Poisson podemos escribir las ecuaciones de movimiento como

$$\{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad y \quad \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (4)$$

Finalmente, tenemos una sencilla caracterización de las constantes de movimiento del sistema, ya que  $h \in C^\infty(M)$  es una constante del movimiento sí y solamente sí  $\{h, H\} = 0$ .

**La Geometría simpléctica de la dinámica.** Volvamos ahora sobre el término “simpléctico” e ilustremos cómo la estructura simpléctica determina completamente la dinámica del sistema.

Una variedad simpléctica  $(M, \omega)$  es un espacio  $M$  de dimensión par dotado de una 2-forma  $\omega$  cerrada y no degenerada. Lo anterior significa que  $\omega$  es una función que se evalúa en dos campos vectoriales de forma antisimétrica ( $\omega(X, Y) = -\omega(Y, X)$ ) y que hay un isomorfismo entre los espacios de campos vectoriales y covectores sobre  $M$ , lo cual corresponde físicamente a la transformación de Legendre.

Sea  $Q$  el espacio de configuraciones de un sistema físico, este espacio tiene estructura natural de variedad diferenciable (i.e. podemos darle coordenadas de tal forma que –localmente– este espacio sea equivalente a  $\mathbb{R}^N$ , para algún  $N$  positivo fijo, y los correspondientes cambios de coordenadas puedan describirse por medio de funciones diferenciables) y sobre cada punto consideremos la función

$$\omega = dp_i \wedge dq_i. \quad (5)$$

Cada observable físico  $f \in C^\infty(T^*Q)$  define un *campo vectorial Hamiltoniano*  $X_f$  dado por la ecuación

$$\omega(X_f, \cdot) = -df. \quad (6)$$

Una observación de importancia particular en este punto es que la derivada de Lie de la forma simpléctica a lo largo de un campo vectorial Hamiltoniano es cero:  $\mathcal{L}_{X_f} \omega = 0$ , lo que quiere decir que la forma simpléctica es “constante” sobre las curvas cuyos vectores tangentes son precisamente los vectores de dicho campo.

Para apreciar mejor el significado de esta última afirmación, consideremos una función  $f$  sobre el espacio de fase. Su derivada exterior es (localmente)  $df =$

$\frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i$ , lo que implica que localmente su campo vectorial Hamiltoniano puede escribirse en coordenadas locales como

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i},$$

y entonces, si  $\gamma(t) = (p_i(t), q_i(t))$  es una curva integral de tal campo vectorial, obtenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad \text{y} \quad -\frac{\partial f}{\partial q_i} = \dot{p}_i,$$

lo que nos da precisamente las ecuaciones de Hamilton (1) para una función Hamiltoniana  $f$ . Así, la dinámica clásica del sistema está “encapsulada” en la 2-forma  $\omega$ .

La estructura algebraica del conjunto de observables del espacio de fase también está determinada por la estructura simpléctica, ya que el corchete de Poisson puede expresarse en términos de ella. En efecto, dada una variedad simpléctica arbitraria  $(M, \omega)$  y dos observables  $f, g \in C^\infty(M)$ , el corchete de  $f$  con  $g$  puede definirse a partir de  $\omega$  como

$$\{f, g\} = X_f(g) = -X_g(f) = \omega(X_f, X_g), \quad (7)$$

donde  $X_f$  y  $X_g$  son los campos vectoriales Hamiltonianos definidos por  $f$  y  $g$ , respectivamente. Es fácil ver que, nuevamente, en coordenadas locales esto corresponde exactamente con la definición anterior (2). Para las coordenadas canónicas  $(q_i, p_i)$ , por ejemplo, obtenemos las reglas de conmutación entre coordenadas y momentos de la mecánica clásica:

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}. \quad (8)$$

Finalmente, obsérvese que dados campos vectoriales  $X$  y  $Y$  sobre una variedad simpléctica, su corchete de Lie es definido por  $[X, Y] = XY - YX$ , y hay un *isomorfismo* entre las álgebras de observables (con el corchete de Poisson) y de campos vectoriales Hamiltonianos (con el corchete de Lie) dado que, para cualquier par de observables  $f, g \in C^\infty(M)$ ,

$$[X_f, X_g] = X_{X_f(g)} = X_{\{f, g\}}.$$

A manera de ejemplo, consideremos una partícula cargada bajo la influencia de un campo electromagnético en el espacio-tiempo Minkowskiano, el espacio de configuraciones. El espacio de fase ( $\simeq \mathbb{R}^8$ ) puede ser parametrizado con coordenadas  $(q_i, p_i) \equiv (q_1, q_2, q_3, q_4, p_1, p_2, p_3, p_4)$ , donde  $\pi : TQ^* \rightarrow Q$  es la proyección natural  $\pi(q_i) = x_i$ . El campo electromagnético descrito por su tensor de Faraday  $F$  perturba geoméricamente la variedad simpléctica asociada al sistema como sigue. La forma simpléctica canónica del espacio de fase es  $\omega = dq_i \wedge dp_i$ , y en términos de ésta podemos encontrar las ecuaciones de movimiento

correspondientes, i.e. las ecuaciones de Hamilton asociadas a un Hamiltoniano conteniendo, en particular, la información concerniente a la interacción entre la partícula y el campo. Una forma alternativa de encontrar las ecuaciones de movimiento es utilizar el Hamiltoniano libre del sistema (ignorando los términos de interacción en él) pero introduciendo la interacción en la forma simpléctica. De hecho, las ecuaciones de Maxwell ( $*d*F = j$  y  $dF = 0$ ) implican que  $F$  es cerrada y, tomando el pull-back  $F' = \pi^*(F)$  de  $F$  por la proyección  $\pi$ , se tiene una 2-forma simpléctica

$$\omega_{e,F} = \omega + eF',$$

donde  $e$  denota la carga de la partícula. Más aun, esta forma simpléctica con el Hamiltoniano libre da lugar a las mismas ecuaciones de movimiento que la forma simpléctica canónica con un Hamiltoniano de interacción. Esta es la versión geométrica del conocido método de *acople mínimo*: cambiar las variables de momento  $p$  por “ $p + eA$ ”, donde  $A$  es el potencial electromagnético (definido por  $F = dA$ ) [6].

Todas las variedades simplécticas de la misma dimensión son localmente indistinguibles, e isomorfas a un haz cotangente. Este es el contenido del conocido *Teorema de Darboux*: Alrededor de cada punto en una variedad simpléctica existe siempre un abierto y un sistema de coordenadas en el cual la forma simpléctica tiene la forma (5). Por lo tanto, todas las expresiones en coordenadas locales que hemos escrito anteriormente siguen siendo válidas *localmente* sobre cualquier variedad simpléctica.

## 2 Topología y mecánica cuántica

La descripción cuántica de un sistema físico es radicalmente diferente, en sus métodos y objetivos, a la descripción clásica del mismo. A diferencia del caso clásico, donde los observables físicos corresponden a funciones definidas sobre el espacio de fases y tomando valores reales, en el contexto cuántico un observable físico es modelado matemáticamente por un operador lineal autoadjunto actuando sobre un espacio de Hilbert, el llamado espacio de estados del sistema. En un espacio de Hilbert existe un producto interno que permite definir la noción de norma (o tamaño), lo cual lo hace bastante similar a cualquier espacio euclideo, sin embargo –aún para sistemas muy sencillos– suele ser infinito-dimensional. Así, la descripción de un sistema en física cuántica es mucho menos intuitiva que la descripción usual. Las reglas de la mecánica cuántica, tal y como fueron establecidas a comienzos del siglo anterior después de un análisis detallado de resultados experimentales, dan una idea de cómo debe darse la correspondencia entre lo clásico (espacio de fases, observables, ecuaciones dinámicas) y lo cuántico (espacio de Hilbert, álgebra de observables, ecuaciones de evolución) para cada sistema físico, por lo menos en el caso de sistemas de partículas. Una de las principales diferencias entre las descripciones clásica y cuántica de la dinámica de un sistema físico es que, mientras en la

primera las coordenadas que parametrizan el conjunto de estados del sistema (y los observables del sistema en sí, siendo funciones) “conmutan” ( $fg = gf$ ), en la segunda (donde los observables son operadores) no ( $\hat{f}\hat{g} \neq \hat{g}\hat{f}$ ), lo cual implica que mientras clásicamente una serie de observaciones sobre un sistema puede llevarse a cabo en *cualquier orden*, en mecánica cuántica el orden en el que ellas se llevan a cabo puede alterar el resultado. El procedimiento que permite encontrar una descripción cuántica de la dinámica de un sistema físico a partir de su descripción clásica es llamado *cuantización*. En las siguientes páginas ilustramos la relevancia de la topología en dos aspectos especialmente: Primero, su aparición en el proceso mismo de cuantización y la interpretación física de ciertos números cuánticos y, segundo, su relevancia en la comprensión de la llamada *relación espín-estadística*.

**Condiciones de Cuantización.** Dada una variedad simpléctica  $(M, \omega)$  cuya estructura de Poisson modela la dinámica clásica de un sistema físico, consideremos el álgebra de Poisson de observables  $(\mathcal{A}_o = C^\infty(M), \{, \})$  correspondiente. El proceso de cuantización comienza por encontrar un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  y una representación de dicha álgebra en el álgebra de operadores autoadjuntos actuando sobre  $\mathcal{H}$  (con el corchete de Lie). Una vez identificados el espacio de Hilbert y la representación del álgebra de observables, la dinámica cuántica del sistema puede llevarse a cabo de múltiples maneras, ya sea mediante funciones de onda que evolucionan en el tiempo o con evolución temporal de operadores. Según Dirac[3], una teoría cuántica admisible debe asociar a cada observable clásico  $f$  un observable cuántico  $\hat{f}$  (actuando sobre  $\mathcal{H}$  y perteneciendo al álgebra correspondiente con corchete de Lie  $[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$ ), y debe verificarse que

1. La aplicación  $f \mapsto \hat{f}$  es lineal.
2. Si  $f$  es constante entonces  $\hat{f}$  debe ser el operador de multiplicación (por la constante  $f$ ).
3. Debe haber una correspondencia entre la dinámica clásica y cuántica en el siguiente sentido: Si  $\{f, g\} = h$ , entonces

$$[\hat{f}, \hat{g}] = -i\hbar\hat{h}, \tag{9}$$

donde  $\hbar$  denota la constante de Planck, una constante universal.

Estas tres condiciones, llamadas *condiciones de Dirac*, dan las propiedades fundamentales que debe tener la representación del álgebra de observables clásicos sobre  $M$  en el álgebra observables cuánticos sobre  $\mathcal{H}$ . La dinámica cuántica se describe en términos de *funciones de onda*, éstas son funciones definidas sobre el espacio de configuraciones del sistema y tomando valores complejos, en términos de las cuales toda la información probabilística del sistema puede ser encontrada: las cantidades  $\psi^*\psi$ , donde  $*$  denota conjugación compleja, corresponden a amplitudes de probabilidad.

La tercera condición, también llamada *principio de correspondencia*, es tal vez la más importante (físicamente) y difícil de satisfacer (matemáticamente). Matemáticamente significa que la *no conmutatividad* del álgebra de observables sobre el espacio de Hilbert es una característica de la descripción cuántica: nótese que si bien, por ejemplo, las variables canónicas (posiciones  $q_j$  y momentos  $p_i$ ) conmutan –como funciones– sobre el espacio de fase (es decir,  $q_j p_i - p_i q_j = 0$ ), según (8) su corchete de Poisson no es nulo; la condición (9) implica que la correspondiente relación entre su contraparte cuántica debe ser

$$[\widehat{p}_i, \widehat{q}_j] = -i\hbar\delta_{ij}. \quad (10)$$

La constante  $\hbar$  representa el más pequeño cuanto de acción realizable físicamente y, aunque su valor preciso ha sido medido experimentalmente, es común pensar que de poderse variar hasta llevarlo a cero, y según el principio de correspondencia, esto sería equivalente a tomar el “límite” cuando el álgebra cuántica –no conmutativa– de operadores coincide con el álgebra clásica –conmutativa– de observables, i.e. cuando el corchete de Lie se anula, tal como ocurre con el conmutador (aunque *no* el corchete de Poisson) entre funciones.

Hay diferentes aproximaciones al problema de obtener una cuantización de un sistema físico apartir de su estructura geométrica, es decir de su estructura simpléctica. El caso más general se obtiene, por ejemplo, modelando las funciones de onda como secciones de un haz lineal  $L \xrightarrow{\pi} M$  sobre el espacio de fase (y no como funciones sobre éste con valores complejos, como es el caso usual), y buscar condiciones para la existencia del espacio de Hilbert y la representación de observables a partir de una estructura simpléctica. Este procedimiento es llamado cuantización geométrica, y las condiciones para la existencia de haces lineales de (pre-)cuantización sobre la variedad simpléctica modelando el espacio de fase corresponden a las condiciones de cuantización de ciertas variables usualmente encontradas en física (ver, por ejemplo, [6][11]). La topología entra aquí fundamentalmente en lo relativo a las condiciones necesarias para la existencia de dicho haz, ya que dependiendo de la topología del espacio de fase en cuestión pueden existir uno, ninguno o infinitos haces de “secciones de onda”.

En términos más precisos –y abstractos para el no experto, dada una variedad simpléctica  $(M, \omega)$ , existe un haz lineal complejo sobre ella  $L \xrightarrow{\pi} M$  dotado de una conexión  $\nabla$  cuya curvatura es  $\hbar^{-1}\omega$  si y solo si la clase de cohomología de  $(2\pi\hbar)^{-1}\omega$  en  $H^2(M, \mathbf{R})$  es entera, es decir si la integral de  $\omega$  sobre una 2-surface cualquiera en  $M$  es un múltiplo entero de  $2\pi\hbar$ . Lo anterior quiere decir que se puede construir una versión cuántica de la descripción de la dinámica de un sistema físico modelado por una pareja  $(M, \omega)$  mediante este procedimiento solamente si el espacio de fases en cuestión tiene las propiedades topológicas adecuadas. Como hay tantos haces de línea sobre  $M$  con las propiedades mencionadas como elementos en el grupo de cohomología  $H^2(M, U(1))$ , calcular tales grupos de permite entender qué sistemas son geoméricamente cuantizables. Cuando la dinámica de un sistema es cuantizable de tal forma, los ingredientes

geométricos, en particular la conexión, permiten encontrar la representación que un observable debe tener como operador en la descripción cuántica. Dado un observable  $f \in C^\infty(M)$  la representación de Konstant-Souriau nos dice que como operador sobre  $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{L})$  es

$$\begin{aligned} C^\infty(M) &\rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{H}) \\ f &\mapsto \hat{f} = f - i\hbar \nabla_{X_f}, \end{aligned} \quad (11)$$

donde  $\nabla_{X_f}(s)$  denota la acción de  $\nabla s$  sobre el campo vectorial Hamiltoniano generado por  $f$ .

Una vez el haz de cuantización es encontrado (reduciendo a “la mitad” las variables que definen las secciones, ver [11]), la representación introducida anteriormente permite obtener las relaciones de conmutación de los observables cuánticos. Por ejemplo, para los operadores de posición y momento

$$\hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i} \quad \text{and} \quad \hat{q}_i = q_i$$

Así obtenemos de nuevo (10), es decir el análogo cuántico de la relación (8).

**Topología y la relación Espín–Estadística.** Históricamente, fue el trabajo de Planck (la propuesta de los “cuantos de acción”, cuya motivación era dar razón de las mediciones del espectro de radiación de un cuerpo negro) el que abrió el camino para lo que eventualmente sería conocido como teoría cuántica. La idea de la existencia de los “cuantos” fue aplicada con éxito desde ese momento, explicando así diversos fenómenos que en ese tiempo no estaban relacionados entre sí, como, por ejemplo, el efecto fotoeléctrico, la radiación nuclear y los espectros de emisión y absorción de los diferentes elementos químicos. Tras el descubrimiento del núcleo atómico (Rutherford) y dado que los espectros de los elementos químicos eran de carácter discreto, fué claro que era necesario desarrollar una teoría cuántica del átomo, que diera razón de ese carácter discreto de los espectros (i.e. las líneas espectrales). El modelo atómico de Bohr constituyó un gran adelanto en esta dirección, que llevó a lo que usualmente se conoce bajo el nombre de la “vieja” teoría cuántica (teoría de Bohr-Sommerfeld). Esta teoría predecía con gran exactitud la posición de muchas de las líneas espectrales del átomo de Hidrógeno. Este no era el caso, sin embargo, para átomos con más de un electrón. Una descripción correcta de los espectros correspondientes a estos átomos, sólo se habría de obtener tras la llegada de la “nueva” teoría cuántica, liderada por Heisenberg, Schrödinger, Dirac y Pauli (entre otros). El principio de exclusión de Pauli, según el cual dos electrones no pueden ocupar el mismo estado cuántico, permitió explicar la forma como están distribuidos los elementos en la tabla periódica y constituyó un paso esencial en el entendimiento de la estructura atómica. El principio de exclusión puede ser considerado como un caso particular de un hecho observado en la naturaleza, conocido como la relación entre espín y estadística. Para discutir esta relación es necesario mencionar brevemente algo acerca del espín.

Tal vez uno de los descubrimientos que más hizo clara la diferencia entre el mundo clásico y el emergente mundo cuántico de la física atómica, fue el descubrimiento del espín electrónico. Stern y Gerlach publicaron en 1922 los resultados de un experimento que demostraba cierta “cuantización espacial” del momento magnético del electrón. El experimento de Stern-Gerlach consistió en hacer pasar un haz de partículas (átomos de plata) a través de un campo magnético inhomogéneo. Clásicamente, es de esperarse que cada una de las partículas que conforman el haz sufra una deflexión, de acuerdo a la orientación (arbitraria) de su momento magnético al atravesar el campo magnético, de tal forma que en la pantalla donde se detectan las partículas aparezca una distribución homogénea en torno a un punto. Sin embargo, lo que Stern y Gerlach observaron fue la aparición de dos manchas, distribuídas en torno a centros separados espacialmente. Este experimento habría de ser comprendido luego de la propuesta de Uhlenbeck y Goudsmid del espín electrónico. El espín de una partícula es una característica intrínseca de esta (al igual que, por ejemplo, su masa). Cuantitativamente, se expresa a través de un número  $s$ , que puede ser entero o semi-entero. Un haz de partículas de espín  $s$  que atraviese un aparato de Stern-Gerlach se desdobra en  $2s + 1$  haces (las partículas usadas por Stern y Gerlach en su experimento original tenían espín  $s = 1/2$ ).

En mecánica cuántica, una partícula de espín  $s$  es descrita por una función de onda  $\psi$  de  $2s + 1$  componentes. La cantidad  $|\psi(x, m_s)|^2$  representa la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula en el punto  $x$  del espacio, con la componente  $z$  de su espín en la “posición”  $m_s$  (los  $2s + 1$  valores posibles de  $m_s$  son  $s, s - 1, \dots, -(s - 1), -s$ ). La función de onda que describe a un sistema de  $N$  partículas es de la forma  $\psi(x_1, m_{s1}; \dots; x_N, m_{sN})$ , donde  $x_i$  representa la posición de la  $i$ -ésima partícula y  $m_{si}$  la componente  $z$  de su espín. En parte debido a que en mecánica cuántica no existe la noción de trayectoria para una partícula, cuando tenemos un conjunto de  $N$  partículas idénticas no podemos considerarlas como distinguibles. Es decir, si tenemos dos partículas (digamos A y B) una configuración en la cual la partícula A está en la posición  $x_1$  con su espín en la posición  $m_{s1}$  y la partícula B en la posición  $x_2$  con su espín en la posición  $m_{s2}$ , no puede distinguirse físicamente de una configuración en la cual la partícula A está en la posición  $x_2$  con su espín en  $m_{s2}$  y B está en  $x_1$  con su espín en  $m_{s1}$ . En términos de la función de onda de estas dos partículas, esta *indistinguibilidad cuántica* se expresa a través de la siguiente relación:

$$|\psi(x_1, m_{s1}; x_2, m_{s2})|^2 = |\psi(x_2, m_{s2}; x_1, m_{s1})|^2$$

Nótese que, debido a que la igualdad en la relación anterior es entre las normas de las cantidades respectivas, lo que se está afirmando es que  $\psi(x_1, m_{s1}; x_2, m_{s2})$  y  $\psi(x_2, m_{s2}; x_1, m_{s1})$  difieren tan sólo en una fase (i.e un factor de la forma  $e^{i\theta}$ ). Esta fase está determinada por la relación entre espín y estadística, según la cual  $e^{i\theta} = (-1)^{2s}$ :

$$\psi(x_1, m_{s1}; x_2, m_{s2}) = (-1)^{2s} \psi(x_2, m_{s2}; x_1, m_{s1}). \quad (12)$$

Para electrones,  $s = 1/2$ . Esto quiere decir que la función de onda de dos electrones es antisimétrica y por lo tanto se anula si los dos electrones ocupan el mismo estado cuántico: el principio de exclusión.

La generalización de la relación (12) para  $N$  partículas ha sido verificada experimentalmente una vez tras otra. Pero no sólo eso: Pauli mismo mostró (1940) que es posible deducirla a partir de los principios generales de la *teoría cuántica de campos relativista* (entre ellos, el papel de la causalidad, expresado en términos de la covarianza de la teoría con respecto al grupo de Poincaré, juega un papel prominente). Esta teoría es el resultado (aún no culminado) de un arduo camino en el intento por conciliar los principios básicos de la mecánica cuántica y la relatividad especial y contiene, en principio, a la mecánica cuántica como límite de bajas energías. Sin embargo, algunos físicos (entre ellos Feynman<sup>1</sup>) han sido de la opinión de que el verdadero origen de la relación entre espín y estadística no ha sido comprendido aún. Esto, sumado al hecho de que muchos fenómenos cuánticos en el régimen no relativista dependen esencialmente de la relación entre espín y estadística, hace deseable la búsqueda de una derivación alternativa. Es interesante el hecho de que, desde el punto de vista teórico, hay algunas evidencias que apuntan hacia una derivación alternativa, de carácter puramente geométrico.

Por un lado, la función de onda de una partícula de espín  $s$  cambia su fase en un factor  $(-1)^{2s}$  cuando es sujeta a una rotación en un ángulo  $2\pi$ . Esta situación, que parece ir en contra de la intuición, se puede verificar experimentalmente y muestra que el grupo de simetría relevante en mecánica cuántica no es el grupo de rotaciones  $SO(3)$  sino el grupo  $SU(2)$  (matemáticamente, el espín de una partícula no es otra cosa que una representación irreducible de  $SU(2)$ ). En este sentido, el factor  $(-1)^{2s}$  refleja directamente la topología del grupo  $SU(2)$ . Además de esto, aparece en relaciones de simetría relacionadas con el intercambio de dos partículas. Por ejemplo, en los llamados coeficientes de Clebsch-Gordan:

$$(s m_2, s m_1 | J M) = (-1)^{2s-J} (s m_1, s m_2 | J M),$$

que provienen directamente de la teoría de representaciones de  $SU(2)$  y que aparecen en la teoría de adición de momento angular. Este hecho hace pensar que, de alguna forma, la rotación de una partícula en un ángulo de  $2\pi$  sea equivalente al intercambio de dos de ellas<sup>2</sup>.

Por otro lado, consideremos un sistema clásico de partículas idénticas. Si la descripción cuántica de este sistema ha de ser obtenida a partir de algún método de

<sup>1</sup>Feynman R.P., Leighton R.B. and Sands, M. *The Feynman lectures on physics*. Reading, MA: Addison-Wesley (1965)

<sup>2</sup>Ver: Feynman R.P., en *The 1986 Dirac memorial lectures* (ed. R.P. Feynman and S. Weinberg) Cambridge University Press (1987) y D. Finkelstein y J. Rubinstein en *Connection between spin, statistics and kinks*, J. Math. Phys. , vol. 9 , pp 1762-1779 (1968)

cuantización, es conveniente tener en cuenta desde el comienzo la indistinguibilidad de las partículas. Es decir, mientras que para un sistema de  $N$  partículas puntuales el espacio de configuración clásico (en tres dimensiones espaciales) es

$$\tilde{\mathcal{Q}}_N = \{(x_1, x_2, \dots, x_N) \mid x_i \in \mathbb{R}^3, x_i \neq x_j \forall i, j (i \neq j)\},$$

para un sistema de partículas *indistinguibles* el espacio de configuración correcto es

$$\mathcal{Q}_N = \tilde{\mathcal{Q}}_N / S_N,$$

es decir un espacio cociente, obtenido a partir de  $\tilde{\mathcal{Q}}_N$  a través de la identificación de configuraciones físicamente equivalentes (es decir, que correspondan a permutaciones de las posiciones de las partículas). La paradoja de Gibbs provee una razón de peso para considerar este último como el espacio de configuración físicamente correcto ???. Como se mencionó anteriormente, el espacio de funciones de onda es, en general, un espacio de secciones de un haz vectorial sobre el espacio de configuración. Para el caso de partículas de espín cero, este haz es lineal y resulta que las clases de simetría de la función de onda (simétrica o antisimétrica) están en relación biyectiva con las clases de equivalencia de haces lineales sobre  $\mathcal{Q}_N$ . En este caso resulta que las posibles estadísticas de la función de onda están determinadas por la topología del espacio de configuración clásico. Vale la pena contrastar este resultado con el postulado de simetrización, que debe ser *impuesto* como un postulado adicional en mecánica cuántica, con el fin de levantar el degeneramiento de intercambio. En el caso de espín diferente de cero esta relación no es tan directa. Sin embargo, en los últimos años ha surgido un interés renovado por el tema (ver ??) y es posible pensar que, aún cuando la relación entre espín y estadística no se pueda establecer dentro del marco de la mecánica cuántica no relativista, sí sea posible encontrar una interpretación geométrica del teorema de espín y estadística (de teoría cuántica de campos). Dicha interpretación abriría las puertas a nuevas e interesantes posibilidades como, por ejemplo, la de expresar (o deducir) condiciones de causalidad en términos geométricos[1].

## References

- [1] Berry M. V. en *Indistinguishable spinning particles*, en XIIIth International Congress of Mathematical Physics (eds. A Fokas, A Grigoryan, T Kibble and B Zegarlinski) pp 29-30 International Press of Boston (2001)
- [2] Cannas da Silva, A. and Weinstein, A. *Geometric Models for Noncommutative Algebras*. Berkeley Mathematics Lecture Notes, 10. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [3] Dirac, P. A. M. *The Principles of Quantum Mechanics*. 3d ed. Oxford, Clarendon Press, 1947.
- [4] Fedosov, B. *A simple geometrical construction of deformation quantization*. J. Differential Geom. **40** (1994), no. 2, 213–238.

- [5] Fedosov, B. *Deformation Quantization and Index Theory*. Mathematical Topics. 9. Berlin: Akademie Verlag, 1996.
- [6] Guillemin, V. and Sternberg, S. *Symplectic Techniques in Physics*. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [7] Jost, J. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Third edition. Springer-Verlag, 2002.
- [8] Landau, L. and Lifshitz, E. M. *Mechanics*. Course of Theoretical Physics, Vol. 1. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass. 1960
- [9] Vaisman, I. *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*. Progress in Mathematics, 118. Birkhuser Verlag, Basel, 1994.
- [10] Weinstein, A. *Deformation Quantization*. Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94. Astérisque No. 227 (1995), Exp. No. 789, 5, 389–409.
- [11] Woodhouse, N. *Geometric Quantization*. Second Edition. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1992.