Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Grupos de Lie – Tarea 3 $\oplus$ Parcial 2

Abril 28 de 2016

1. Sea G un grupo de Lie que actúa transitivamente sobre una variedad conexa M. Demuestre que G^o, la componente a la identidad de G, actúa transitivamente sobre M.

2. Una equivalencia del Teorema de Hopf-Rinow establece que una variedad Riemanniana conexa M es completa (el dominio de toda geodésica es todo $\mathbb{R}$) si y solo si, para todo par de puntos $p, q \in M$, existe una geodésica γ con condición inicial $\gamma(0) = p$ que los une.

i. Sea $\mathsf{GL}^+(n) = \{A \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$ la componente conexa a la identidad de $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$. Demuestre que $\mathsf{GL}^+(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ actúa transitivamente sobre $\mathbb{R}^n$ y que la acción es efectiva.

ii. Pruebe que $\exp : \mathfrak{gl}(n) \to \mathsf{GL}^+(n)$ no es sobreyectiva (puede probarlo para $n = 2$, como en una de las evaluaciones anteriores), y use lo anterior para demostrar que $\mathbb{R}^n$ no tiene una métrica $\mathsf{GL}^+(n) \ltimes \mathbb{R}^n$-invariante.

3. Considere el grupo de Lie $\mathsf{SO}(n)$ y su álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n) = T_I\mathsf{SO}(n)$. Recuerde que, para cualquier $A \in \mathsf{SO}(n)$, $T_A\mathsf{SO}(n) = (L_A)_* T_I\mathsf{SO}(n) = A \cdot T_I\mathsf{SO}(n)$.

i. Demuestre que $\langle X, Y\rangle_A := \mathsf{Tr}(A^{-1}X(A^{-1}Y)^T)$, donde $X, Y \in T_A\mathsf{SO}(n)$, define una métrica Riemanniana $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sobre $\mathsf{SO}(n)$.

ii. Demuestre que la métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es bi-invariante.

iii. Demuestre que si X, Y denotan campos vectoriales invariantes a izquierda sobre $\mathsf{SO}(n)$, entonces $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ es la conección de Levi-Civita asociada a la métrica dada.

iv. Demuestre que las geodésicas en $(\mathsf{SO}(n), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ que pasan por I son precisamente las curvas $c_X(t) = e^{tX} = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tX)^j}{j!}$.

4.

i. Demuestre que todas las representaciones irreducibles de dimensión finita de un grupo de Lie abeliano son 1-dimensionales.

ii. Calcule todas las representaciones irreducibles de S^1, y muestre que $\widehat{S^1} \cong \mathbb{Z}$.

5. Demuestre que $(\pi_m, \mathbb{C}_m[x,y])$ (el espacio vectorial de polinomios homogeneos de grado m en dos variables, con la acción $(\pi_m(g)f)(x,y) = f((x,y)\cdot g)$ vista en clase) son todas las representaciones irreducibles de dimensión finita del grupo de Lie $\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$, y calcule sus caracteres.