Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Grupos de Lie – Tarea 2

Abril 1 de 2016

1. Variedad de Stiefel. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita d, y sea $S_k(V)$ el conjunto de k-marcos de V, i.e.

$$S_k(V) = \{\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_k) \mid w_1, \dots, w_k \text{ son linealmente independientes en } V\}.$$

Considere la acción $\varphi : \mathsf{GL}(d, \mathbb{R}) \times S_k(V) \to S_k(V) : (A, (w_1, \dots, w_k)) \mapsto (Aw_1, \dots, Aw_k)$.

i. Demuestre que la acción es transitiva.

ii. Calcule el grupo de isotropía de un elemento $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_k) \in S_k(V)$.

iii. Concluya que el conjunto $S_k(V)$ es un espacio homogeneo (y entonces es una variedad) y calcule su dimensión.

2. Campos vectoriales fundamentales. Sea $\phi : G \times M \to M$ una acción suave del grupo de Lie G sobre la variedad M, entonces el álgebra de Lie de G puede realizarse dentro del álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$ de campos vectoriales sobre M, con corchete de Lie, de la siguiente forma. Para cada $\xi \in \mathfrak{g} = T_eG$ definimos el *campo vectorial fundamental* $X_\xi \in \mathfrak{X}(M)$ asociado a la acción (a derecha) como

$$X_\xi(m) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R_{\exp(t\xi)}(m) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot m,$$

donde $\phi(m, g) = g \cdot m$ denota la acción y $\exp : \mathfrak{g} \to G$ la aplicación exponencial. Demuestre que:

i. La aplicación $\xi \mapsto X_\xi$ define un anti-homomorfismo de álgebras de Lie, i.e. para todo $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$

$$X_{[\xi,\eta]} = -[X_\xi, X_\eta].$$

Si la acción es considerada a izquierda, $\xi \mapsto X_\xi$ define un homomorfismo de álgebras de Lie.

ii. Si $G \cdot m$ denota la órbita de $m \in M$ bajo la acción, para todo x en la órbita

$$T_x(G \cdot m) = \mathrm{Sp}\{X_\xi(x) \mid \xi \in \mathfrak{g}\}.$$

iii. Si G_m denota el estabilizador de $m \in M$, su álgebra de Lie es

$$\mathfrak{g}_m = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid X_\xi(m) = 0\}.$$

iv. Considere la acción (o representación) adjunta $\mathrm{ad} : G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : (g, \xi) \mapsto \mathrm{ad}_g(\xi)$ de un grupo de Lie G sobre su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Calcule el campo vectorial fundamental $X_\xi \in \mathfrak{X}(\mathfrak{g})$ asociado a cada $\xi \in \mathfrak{g}$.

3. Conexidad. Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado de G.

i. Demuestre que G es conexo si tanto H como el espacio homogeneo G/H son conexos.

ii. Use lo anterior para mostrar que los grupos de Lie $\mathsf{SO}(n, \mathbb{R})$ y $\mathsf{SU}(n)$ son conexos.