Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Grupos de Lie – Tarea 1

Febrero 12 de 2016

1. **El grupo de Heisenberg**. Ejercicio **1.6** del texto de Duistermaat y Kolk, página 82.

2. **Productos semidirectos**. Ejercicio **1.12** del texto de Duistermaat y Kolk, página 84.

3. **Aplicación exponencial en** $SU(2)$.

i. Demuestre que toda matriz de $SU(2)$ es conjugada a una matriz de la forma $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, donde $\theta \in \mathbb{R}$.

ii. Use lo anterior para mostrar que la aplicación exponencial
$$\exp : \mathbb{R}^3 \cong \left\{ \begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \to SU(2)$$
es sobreyectiva.

4. **Aplicación exponencial en** $SL(2,\mathbb{R})$.

i. Demuestre que toda matriz de $SL(2,\mathbb{R})$ es conjugada a una de las siguientes matrices : $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, donde $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, t \in \mathbb{R}$ y $\theta \in \mathbb{R}$.

ii. Use lo anterior para mostrar que la imagen de la aplicación exponencial
$$\exp : \mathbb{R}^3 \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \to SL(2,\mathbb{R})$$
es
$$\{M \in SL(2,\mathbb{R}) |\, \mathrm{tr}(M) > -2\} \cup \{-I\}.$$

5. **Aplicación exponencial en** $GL_n(\mathbb{C})$. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ y denotemos por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sus valores propios.

i. Demuestre que los valores propios de L_A son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, cada uno repetido n veces y, en consecuencia,
$$\det(L_A) = (\det A)^n.$$

ii. Demuestre que los valores propios de $\mathtt{ad}_A$ son los números de la forma $\lambda_i - \lambda_j$, para $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

iii. Use lo anterior para demostrar que $\exp_{*,A}$, la derivada de la aplicación exponencial en A, es invertible si y solamente si $\lambda_i - \lambda_j \notin 2\pi i(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

iv. Demuestre que la aplicación exponencial $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ es sobreyectiva.