Geometría de Formas Diferenciales – *Tarea 1*

Febrero 7 de 2014

1. Demuestre que $T(n)$, el conjunto de matrices triangulares superiores $n \times n$ no singulares, es una variedad. Encuentre su espacio tangente en la identidad.

2. Considere $\mathbb{R}^2$ con sistemas coordenados cartesiano (x, y) y polar (r, θ). Pruebe que
$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial r}\right] = -\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

3. Determine el flujo del campo vectorial
$$X = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$
sobre $\mathbb{R}^3$.

4.
   i. Muestre que la distribución en $\mathbb{R}^4$, con coordenadas (x, y, z, w), generada por $\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial w}$ no tiene subvariedades integrales de dimensión 2.

   ii. Considere los campos vectoriales $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial w} - w\frac{\partial}{\partial z}$ y $Y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} + w\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial w}$ sobre la esfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Pruebe que el sistema $\{X, Y\}$ es integrable y encuentre sus subvariedades integrales en S^3.

5. Sean M y N variedades suaves de dimensión m y n, respectivamente, y considere una función suave $F : M \to N$ de rango máximo en $x_o \in M$. Use el teorema de la función implícita para demostrar que existen una carta local alrededor de x_o, con coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, y una carta local alrededor de $y_o = F(x_o)$, con coordenadas $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, tales que en tales coordenadas F tiene la forma
$$y = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \qquad \text{si } n > m$$
ó
$$y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{si } n \leq m.$$

6. Haga el ejercicio 7.8 de Tu, L.W. (Grassmannianas.)

7. Haga el ejercicio 8.8 de Tu, L.W. (Diferenciales de multiplicación e inversa.)

8. Haga el ejercicio 9.10 de Tu, L.W. (Transversalidad.)