Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Cálculo en Variable Compleja – Tarea 3

Mayo 5 de 2017

1. Para cada una de las siguientes funciones calcule el residuo en el punto dado:

i. $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^n}$ en $z_0 = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

ii. $f(z) = \left(\dfrac{z-1}{z+3i}\right)^3$ en $z_0 = -3i$.

iii. $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \pi z}$ en $z_0 = k \in \mathbb{Z}$.

iv. $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \pi z}\dfrac{z+1}{z-1}$ en $z_0 = 1$.

v. $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \pi z}\dfrac{z+1}{z-1}$ en $z_0 = k$, donde $k \in \mathbb{Z}$ y $k \neq 1$.

2. Use el Teorema del Residuo para demostrar las siguientes identidades:

i.

$$\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2\pi i n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Ayuda: Use la expansión binomial $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$.

ii.

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^a (x+1)}\, dx = \frac{\pi^2 \cos(\pi a)}{\operatorname{sen}^2(\pi a)},$$

si $0 < a < 1$.

3. Calcule los residuos de las correspondientes funciones en los puntos singulares pertinentes, y úselos para calcular las siguientes integrales:

i. $\displaystyle\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\pi z/4}}{z^2+1}\, dz.$

ii. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\sin^2\theta + 9\cos^2\theta}\, d\theta.$

iii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx.$

iv. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3}\, dx.$

4. Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ un polinomio de grado n con coeficientes complejos. El objetivo de este ejercicio es dar otra prueba del *Teorema Fundamental del Álgebra*, i.e. que $p(z)$ tiene exactamente n ceros en $\mathbb{C}$.

i. Sean $f(z) = a_n z^n$ y $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}$. Demuestre que, sobre un círculo $C_r(0)$ de radio r centrado en 0

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|}{|a_n| r}$$

y, en consecuencia, si r es lo suficientemente grande, $|g(z)| < |f(z)|$ en $C_r(0)$.

ii. Use el Teorema de Rouché para demostrar que el número de ceros de $p(z)$ dentro de $C_r(0)$ es igual al número de ceros de $f(z)$ dentro de $C_r(0)$, lo que prueba el Teorema Fundamental del Álgebra.