Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Cálculo en Variable Compleja – Solución Tarea 3

Mayo 26 de 2017

1. Para cada una de las siguientes funciones calcule el residuo en el punto dado:

i. $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^n}$ en $z_0 = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

ii. $f(z) = \left(\dfrac{z-1}{z+3i}\right)^3$ en $z_0 = -3i$.

iii. $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \pi z}$ en $z_0 = k \in \mathbb{Z}$.

iv. $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \pi z} \dfrac{z+1}{z-1}$ en $z_0 = 1$.

v. $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \pi z} \dfrac{z+1}{z-1}$ en $z_0 = k$, donde $k \in \mathbb{Z}$ y $k \neq 1$.

Sol:

i.

$$\frac{e^{z^2}}{z^n} = \frac{1}{z^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k-n}}{k!}$$

El coeficiente $\dfrac{1}{k!}$, con $k = \dfrac{n-1}{2}$, va a ser el residuo de f en 0. Note que si n es par, la anterior serie de potencias sólo tiene potencias pares de z, por lo tanto el residuo de f es 0. Entonces

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{z^2}}{z^n}, 0\right] = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{1}{(\frac{n-1}{2})!}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

ii. Como $\left(\dfrac{z-1}{z+3i}\right)^3$ tiene un polo de orden 3 en $-3i$, tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left[\left(\frac{z-1}{z+3i}\right)^3, -3i\right] &= \frac{1}{2!} \lim_{z \to -3i} \frac{d^2}{dz^2} (z+3i)^3 \left(\frac{z-1}{z+3i}\right)^3 \\ &= 3(z-1)\Big|_{z=-3i} \\ &= -3 - 9i \end{aligned}$$

iii. Como $\dfrac{1}{\sin(\pi z)}$ tiene un polo de orden 1 en k, tenemos que

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\sin(\pi z)}, k\right] = \frac{1}{\frac{d}{dz}\sin(\pi z)}\Bigg|_{z=k} = \frac{1}{\pi \cos(\pi k)} = \frac{(-1)^k}{\pi}$$

iv. Como $\dfrac{z+1}{\sin(\pi z)(z-1)}$ tiene un polo de orden 2 en 1, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{z+1}{\sin(\pi z)(z-1)},1\right] &= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}(z-1)^2\frac{z+1}{\sin(\pi z)(z-1)}\\
&= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\frac{z^2-1}{\sin(\pi z)}\\
&= \lim_{z\to 1}\frac{2z\sin(\pi z)+\pi(1-z^2)\cos(\pi z)}{\sin^2(\pi z)}
\end{aligned}
$$

Usando l'Hôpital

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{z+1}{\sin(\pi z)(z-1)},1\right] &= \lim_{z\to 1}\frac{\frac{d}{dz}(2z\sin(\pi z)+\pi(1-z^2)\cos(\pi z))}{\frac{d}{dz}(\sin^2(\pi z))}\\
&= \lim_{z\to 1}\frac{\sin(\pi z)(\pi^2(z^2-1)+2)}{2\pi\sin(\pi z)\cos(\pi z)}\\
&= \lim_{z\to 1}\frac{\pi^2(z^2-1)+2}{2\pi\cos(\pi z)}\\
&= -\frac{1}{\pi}
\end{aligned}
$$

v. Como $\dfrac{z+1}{\sin(\pi z)(z-1)}$ tiene un polo de orden 1 en $k\neq 1$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{z+1}{\sin(\pi z)(z-1)},1\right] &= \left.\frac{z+1}{(z-1)\frac{d}{dz}\sin(\pi z)}\right|_{z=k}\\
&= \frac{k+1}{\pi(k-1)\cos(\pi k)}\\
&= \frac{(-1)^k(k+1)}{\pi(k-1)}
\end{aligned}
$$

2. Use el Teorema del Residuo para demostrar las siguientes identidades:

i.

$$
\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par}\\ \frac{2\pi i n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!}, & \text{si } n \text{ es impar.}\end{cases}
$$

Ayuda: Use la expansión binomial $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}b^k$.

ii.

$$
\int_0^\infty \frac{\log x}{x^a(x+1)}\,dx = \frac{\pi^2\cos(\pi a)}{\operatorname{sen}^2(\pi a)},
$$

si $0<a<1$.

Sol:

i.

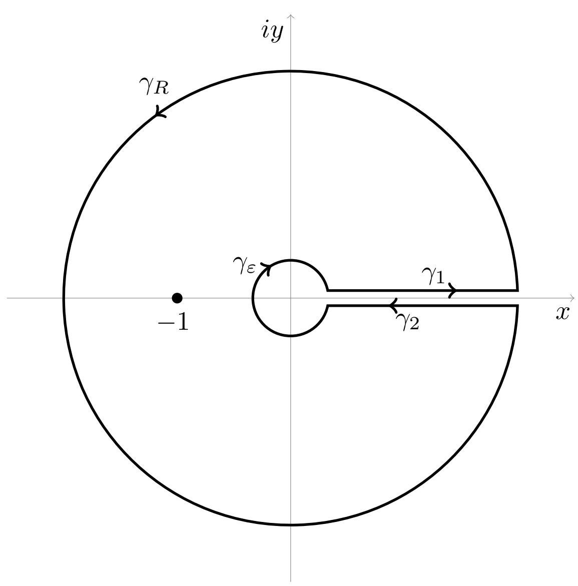
$$\begin{aligned}\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^n dz &= \int_{|z|=1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k\left(\frac{1}{z}\right)^{n-k} dz\\ &= \int_{|z|=1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^{2k-n} dz\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_{|z|=1} z^{2k-n} dz\end{aligned}$$

Si n es par, $2k-n$ es par y así z^{2k-n} tiene antiderivada sobre el camino $|z|=1$ y así $\displaystyle\int_{|z|=1} z^{2k-n}dz = 0$ para cada k.

Si n es impar, entonces el exponente -1 de z ocurre en la anterior suma para $k=\dfrac{n-1}{2}$ y así la única integral no nula en esta suma es la de $k=\dfrac{n-1}{2}$, la cual es igual a $2\pi i\binom{n}{\frac{n-1}{2}} = 2\pi i\dfrac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!}$. Entonces

$$\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par}\\ \frac{2\pi i n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!}, & \text{si } n \text{ es impar.}\end{cases}$$

ii. Tomaremos la rama del logaritmo dada por el corte $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ y la siguiente curva Γ



Con $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_R + \gamma_2 + \gamma_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= t & t\in[\varepsilon,R] && \mathrm{Arg}(\gamma_1(t)) = 0\\ \gamma_R(t) &= Re^{it} & t\in[0,2\pi] &&\\ \gamma_2(t) &= t & t\in[R,\varepsilon] && \mathrm{Arg}(\gamma_2(t)) = 2\pi\\ \gamma_\varepsilon(t) &= \varepsilon e^{it} & t\in[2\pi,0] && \end{aligned}$$

Como la única singularidad de la función encerrada por Γ es -1, por el Teorema del residuo tenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{\log(z)}{z^a(z+1)}dz =& 2\pi i \text{Res}\left[\frac{\log(z)}{z^a(z+1)}, -1\right]\\ =& 2\pi i \frac{\log(-1)}{(-1)^a}\\ =& 2\pi i \frac{i\pi}{e^{i\pi a}}\end{aligned}$$

Para z sobre γ_R, $z(t) = Re^{it}$. tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\log(z)}{z^a(z+1)}\right| =& \frac{\left|\log(Re^{it})\right|}{|R^a e^{ita}|\,|z(t)+1|}\\ =& \frac{\left(\ln(R)^2+t^2\right)^{1/2}}{R^a\left(R^2+2R\cos(t)+1\right)^{1/2}}\\ \leq& \frac{\left(\ln(R)^2+4\pi^2\right)^{1/2}}{R^a\left(R^2-2R+1\right)^{1/2}}\\ =& \frac{\left(\ln(R)^2+4\pi^2\right)^{1/2}}{R^a(R-1)}\\ \leq& \frac{\ln(R)+2\pi}{R^a(R-1)}\\ \leq& \frac{\ln(R)+2\pi}{R^{a+1}}\end{aligned}$$

Usando la estimación módulo-longitud

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{\log(z)}{z^a(z+1)}dz\right| \leq 2\pi \frac{\ln(R)+2\pi}{R^a}$$

Y

$$\lim_{R\to\infty} 2\pi \frac{\ln(R)+2\pi}{R^a} = 2\pi \lim_{R\to\infty} \frac{1}{aR^a} = 0$$

Esto último por l'Hôpital y que $a > 0$. Entonces

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{\log(z)}{z^a(z+1)}dz = 0$$

Para z sobre γ_ε, $z(t) = \varepsilon e^{it}$, tenemos que

$$\left|\frac{\log(z)}{z^a(z+1)}\right| \leq \frac{\left(\ln(\varepsilon)^2+t^2\right)^{1/2}}{\varepsilon^a|z(t)+1|}$$

Sabemos que $|z+1| \geq ||z|-1|$, en este caso es igual $\varepsilon-1$, y si $\varepsilon \leq 1$, es igual a $1-\varepsilon$, entonces

$$\left|\frac{\log(z)}{z^a(z+1)}\right| \leq \frac{|\ln(\varepsilon)| + 2\pi}{\varepsilon^a(1-\varepsilon)}$$

Tambien, si $0 < \varepsilon < 1$, como $0 < a < 1$ se tiene que $\varepsilon^a > \varepsilon$, entonces

$$\left|\frac{\log(z)}{z^a(z+1)}\right| \leq \frac{|\ln(\varepsilon)| + 2\pi}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$$

De nuevo, como $0 < \varepsilon < 1$, entonces $1 > \varepsilon > \varepsilon - \varepsilon^2$, entonces

$$\left|\frac{\log(z)}{z^a(z+1)}\right| \leq |\ln(\varepsilon)| + 2\pi$$

Usando la estimación módulo-longitud

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\log(z)}{z^a(z+1)} dz\right| \leq 2\pi\varepsilon|\ln(\varepsilon)| + 4\pi^2\varepsilon$$

Y

$$\lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi\varepsilon|\ln(\varepsilon)| + 4\pi^2\varepsilon = 0$$

Entonces

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\log(z)}{z^a(z+1)} dz = 0$$

Para z en $\gamma_2(t)$, como $\mathrm{Arg}(\gamma_2(t)) = 2\pi$, tenemos que

$$\log(z) = \ln(z) + 2\pi i$$

Y por lo tanto

$$z^a = e^{a\log(z)} = e^{a(\ln(z)+i2\pi)=z^a e^{2\pi i a}}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2}\frac{\log(z)}{z^a(z+1)}dz &= \int_R^{\varepsilon}\frac{\ln(t)+2\pi i}{t^a e^{2\pi i a}}(t+1)dt\\ &= -\,e^{-2\pi i a}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\ln(t)}{t^a(t+1)}dt - 2\pi i e^{-2\pi i a}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{dt}{t^a(t+1)}\end{aligned}$$

Por lo tanto si $\varepsilon \to 0$ y $R \to \infty$

$$\begin{aligned}\left(1-e^{-2\pi i a}\right)\int_0^{\infty}\frac{\ln(t)}{t^a(t+1)}dt - 2\pi i e^{-2\pi i a}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^a(t+1)} &= 2\pi i\frac{\pi i}{e^{\pi i a}}\\ \int_0^{\infty}\frac{\ln(t)}{t^a(t+1)}dt - 2\pi i\frac{e^{-2\pi i a}}{1-e^{-2\pi i a}}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^a(t+1)} &= 2\pi i\frac{\pi i}{e^{\pi i a}(1-e^{-2\pi i a})}\\ \int_0^{\infty}\frac{\ln(t)}{t^a(t+1)}dt - \pi e^{-\pi i a}\frac{2i}{e^{\pi i a}-e^{-\pi i a}}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^a(t+1)} &= \pi^2 i\frac{2i}{e^{\pi i a}-e^{-\pi i a}}\\ \int_0^{\infty}\frac{\ln(t)}{t^a(t+1)}dt - \frac{\pi e^{-\pi i a}}{\sin(\pi a)}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^a(t+1)} &= \frac{\pi^2 i}{\sin(\pi a)}\\ \int_0^{\infty}\frac{\ln(t)}{t^a(t+1)}dt - \frac{\pi(\cos(\pi a)-i\sin(\pi a))}{\sin(\pi a)}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^a(t+1)} &= \frac{\pi^2 i}{\sin(\pi a)}\end{aligned}$$

Tomando parte imaginaria tenemos que

$$\pi\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^a(t+1)} = \frac{\pi^2}{\sin(\pi a)} \to \int_0^{\infty}\frac{dt}{t^a(t+1)} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

Tomando parte real tenemos que

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln(t)}{t^a(t+1)}dt = \frac{\pi\cos(\pi a)}{\sin(\pi a)}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^a(t+1)} = \frac{\pi\cos(\pi a)}{\sin(\pi a)}\frac{\pi}{\sin(\pi a)} = \frac{\pi^2\cos(\pi a)}{\sin^2(\pi a)}$$

3. Calcule los residuos de las correspondientes funciones en los puntos singulares pertinentes, y úselos para calcular las siguientes integrales:

i. $\displaystyle\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{e^{\pi z/4}}{z^2+1}\,dz.$

ii. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\sin^2\theta+9\cos^2\theta}\,d\theta.$

iii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}\,dx.$

iv. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^3}\,dx.$

Sol:

i. La función tiene dos polos de orden 1, $\pm i$, que se encuentran dentro del disco $|z| \leq \frac{3}{2}$, entonces por el teorema del residuo

$$\begin{aligned}\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{\pi}{4}z}}{z^2+1}dz =&2\pi i\left(\operatorname{Res}\left[\frac{e^{\frac{\pi}{4}z}}{z^2+1}, i\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{e^{\frac{\pi}{4}z}}{z^2+1}, -i\right]\right)\\ =&2\pi i\left(\left.\frac{e^{\frac{\pi}{4}z}}{2z}\right|_{z=i} + \left.\frac{e^{\frac{\pi}{4}z}}{2z}\right|_{z=-i}\right)\\ =&2\pi i\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2i}\right)\\ =&2\pi i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ =&\sqrt{2}\pi i\end{aligned}$$

ii. Pongamos $z = e^{i\theta}$, entonces podemos escribir la integral de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4\sin^2\theta + 9\cos^2\theta} =& \int_{|z|=1} \frac{1}{4\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2 + 9\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2}\frac{dz}{iz}\\ =&\frac{4}{i}\int_{|z|=1} \frac{z}{5z^4+26z^2+5}dz\end{aligned}$$

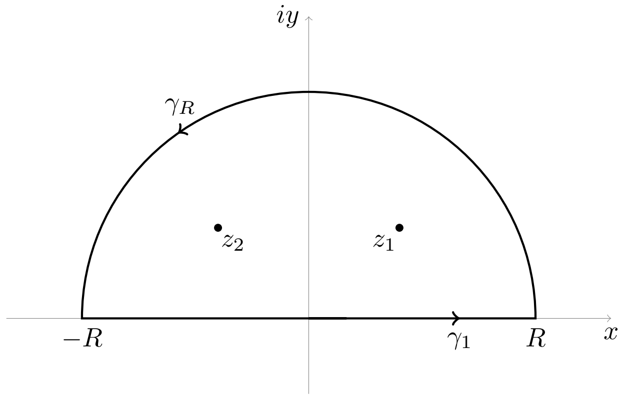
Los polos de $\frac{z}{5z^4+26z^2+5}$ son $\pm i\sqrt{5}, \pm\frac{i}{\sqrt{5}}$, pero únicamente $\pm\frac{i}{\sqrt{5}}$ se encuentran dentro del disco $|z| \leq 1$. Además, ambos son polos de orden 1, entonces por el teorema del residuo

$$\begin{aligned}\frac{4}{i}\int_{|z|=1} \frac{z}{5z^4+26z^2+5}dz =&\frac{1}{4i}2\pi i\left(\operatorname{Res}\left[\frac{z}{5z^4+26z^2+5}, \frac{i}{\sqrt{5}}\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{z}{5z^4+26z^2+5}, -\frac{i}{\sqrt{5}}\right]\right)\\ =&8\pi\left(\left.\frac{z}{20z^3+52z}\right|_{z=\frac{i}{\sqrt{5}}} + \left.\frac{z}{20z^3+52z}\right|_{z=\frac{i}{\sqrt{5}}}\right)\\ =&\frac{8\pi}{24}\\ =&\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4\sin^2\theta + 9\cos^2\theta} = \frac{\pi}{3}$$

iii. Tomamos la siguiente curva Γ



Con $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_R$

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) =& t & t \in [-R, R] \\ \gamma_R(t) =& Re^{it} & t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

La curva Γ encierra dos singularidades simples, $z_1 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ y $z_2 = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$, por el Teorema del residuo tenemos que

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{1}{1+z^4} dz =& 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left[\frac{1}{1+z^4}, \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{1+z^4}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right] \right) \\ =& 2\pi i \left(\left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} + \left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \right) \\ =& \sqrt{2}\pi i \left[\frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(i-1)^3} \right] \\ =& \sqrt{2}\pi i \left[-\frac{i}{2} \right] \\ =& \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \end{aligned}$$

Para z sobre γ_1, $z(t) = t$, tenemos que

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{1+z^4} dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^4} dt$$

Tomando $R \to \infty$

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{1+z^4} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^4} dt$$

Para z sobre $\gamma_R = Re^{it}$, usando que $|z^4+1| \geq ||z^4|-|1|| = R^4-1$ y la estimación modulo longitud tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{1+z^4}\right| \leq & \frac{\pi R}{R^4-1} \\ \leq & \frac{\pi}{R^3}\end{aligned}$$

Y

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{R^3} = 0$$

Entonces

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz = 0$$

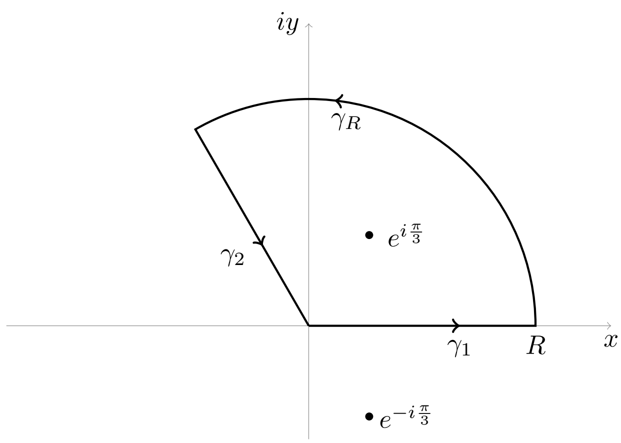
Entonces, cuando $R \to \infty$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{1}{1+z^4} dz = & \int_{\gamma_1} \frac{1}{1+z^4} dz + \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^4} dt = & \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\end{aligned}$$

Como t es una variable muda, tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

iv. Tomamos la siguiente curva Γ



Con $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_r + \gamma_2$

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) =& t & t \in [0, R] \\ \gamma_R(t) =& Re^{it} & t \in [0, \frac{2\pi}{3}] \\ \gamma_2(t) =& te^{i\frac{2\pi}{3}t} & t \in [R, 0]\end{aligned}$$

La única singularidad de la función que es encerrada por Γ es $e^{i\frac{\pi}{3}}$, que es un polo de orden 1. Por el Teorema del residuo

$$\int_{\Gamma}\frac{dz}{1+z^3}=2\pi i\text{Res}\left[\frac{1}{1`z^3}.e^{i\frac{\pi}{3}}\right]=2\pi i\frac{1}{3z^2}\bigg|_{z=e^{i\frac{\pi}{3}}}=\frac{2\pi i}{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

Para z sobre γ_R, $z(t)=Re^{it}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{1+z^3}\right| =&\frac{1}{(|z|^6+2\text{Re}(z^3)+1)^{1/2}}\\ =&\frac{1}{(R^6+2R^3\cos(3t)+1)^{1/2}}\\ \leq&\frac{1}{(R^6-2R^3+1)^{1/2}}\\ \leq&\frac{1}{R^3-1}\end{aligned}$$

Entonces, por el estimativo módulo longitud

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{dz}{1+z^3}\right|\leq\frac{2\pi}{3}\frac{R}{R^3-1}\to\int_{\gamma_R}\frac{dz}{1+z^3}=0$$

Por otro lado, note que

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2}\frac{dz}{1+z^3}=&\int_R^0\frac{1}{1+\left(te^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 e^{i\frac{2\pi}{3}}}dt\\ =&-e^{i\frac{2\pi}{3}}\int_0^R\frac{dt}{1+t^3e^{2\pi i}}\\ =&-e^{i\frac{2\pi}{3}}\int_0^R\frac{dt}{1+t^3}\\ =&-e^{i\frac{2\pi}{3}}\int_{\gamma_1}\frac{dz}{1+z^3}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^3} &= \frac{2\pi i}{3} e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\
\int_{\gamma_1} \frac{dz}{1+z^3} + \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^3} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{1+z^3} &= \frac{2\pi i}{3} e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\
\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \int_{\gamma_1} \frac{dz}{1+z^3} + \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^3} &= \frac{2\pi i}{3} e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\
\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{1+z^3} + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^3} &= \frac{2\pi i}{3} e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\
\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^3} &= \frac{2\pi i}{3} e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\
\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^3} &= \frac{2\pi i}{3} e^{-i\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}} \\
\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^3} &= \frac{\pi}{3} \frac{2i}{e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{4\pi}{3}}} \\
\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^3} &= \frac{\pi}{3} \frac{2i}{e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{-i\frac{2\pi}{3}}} \\
\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^3} &= \frac{\pi}{3} \frac{1}{\sin(\frac{2\pi}{3})} \\
\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^3} &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

4. Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ un polinomio de grado n con coeficientes complejos. El objetivo de este ejercicio es dar otra prueba del *Teorema Fundamental del Álgebra*, i.e. que $p(z)$ tiene exactamente n ceros en $\mathbb{C}$.

i. Sean $f(z) = a_n z^n$ y $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}$. Demuestre que, sobre un círculo $C_r(0)$ de radio r centrado en 0

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|}{|a_n| r}$$

y, en consecuencia, si r es lo suficientemente grande, $|g(z)| < |f(z)|$ en $C_r(0)$.

ii. Use el Teorema de Rouché para demostrar que el número de ceros de $p(z)$ dentro de $C_r(0)$ es igual al número de ceros de $f(z)$ dentro de $C_r(0)$, lo que prueba el Teorema Fundamental del Álgebra.

Sol:

i. Para $z \in C_r(0)$, $|z| = r$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| &= \frac{|a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}|}{|a_n z^n|} \\
&\leq \frac{|a_0| + |a_1||z| + \cdots + |a_{n-1}||z|^{n-1}}{|a_n||z|^n} \\
&= \frac{|a_0| + |a_1| r + \cdots + |a_{n-1}| r^{n-1}}{|a_n| r^n} && \text{en } C_r(0) \\
&< \frac{r^{n-1}(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|)}{r^n |a_n|} && r \geq 1 \\
&= \frac{(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|)}{r|a_n|}
\end{aligned}$$

Y para r suficientemente grande

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1 \to |g(z)| < |f(z)|$$

ii. Como f y g son holomorfas en $D_r(0)$ y tenemos que $|g(z)| < |f(z)|$ sobre $C_r(0) = \partial D_r(0)$, por el teorema de Rouché f y $f + g$ tienen la misma cantidad de ceros en $D_r(0)$. Como $f + g = p$ y f tiene n ceros, p también tiene ceros en $D_r(0) \subset \mathbb{C}$, lo cual prueba el *Teorema Fundamental del Álgebra*.