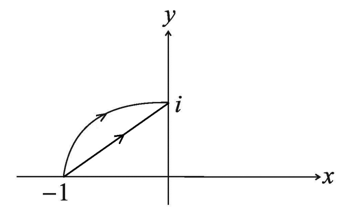
Cálculo en Variable Compleja – *Tarea 2*

Marzo 15 de 2017

1. Calcule las siguientes integrales entre los puntos -1 e i en el plano complejo, siguiendo los dos caminos indicados en la figura (el segmento de recta que une los dos puntos y el arco de circunferencia de radio uno que los conecta).



En cada caso diga si la integral es independiente del camino γ usado y explique claramente por qué.

i. $\displaystyle\int_\gamma |z|^2\, dz.$

ii. $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2}\, dz.$

iii. $\displaystyle\int_\gamma \log z\, dz.$

2. Calcule la integral $\displaystyle\oint_\gamma \frac{z+6}{z^2-4} dz$, siguiendo los caminos indicados:

i. γ es el círculo de radio 1 centrado en el origen.

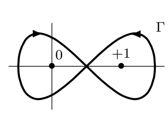
ii. γ es el círculo de radio 1 centrado en $z = 2$.

iii. γ es el círculo de radio 1 centrado en $z = -2$.

3. Calcule las siguientes integrales:

i. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{z+\cos(\pi z)}{z(z^2+1)} dz$, donde γ es el círculo de radio 2 centrado en el origen.

ii. $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{2z+1}{z(z-1)^2} dz$, donde Γ es el contorno indicado en la figura:

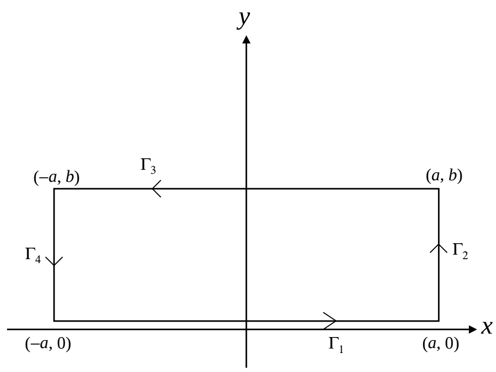


iii. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{e^z}{z^2-2z} dz$, donde γ es el círculo de radio 4 centrado en el origen.

4.

i. Encuentre una cota superior para $\oint_\gamma \dfrac{e^z}{z^2+1}dz$, donde γ es el círculo de radio 2 centrado en el origen.

ii. Considere la integral $\oint_\Gamma e^{-z^2}dz$, donde Γ es el contorno rectangular con vértices $\pm a$, $\pm a + ib$ que se ilustra en le figura.



Fijando b y tomando el límite $a \to \infty$, demuestre que $\oint_{\Gamma_2} e^{-z^2}dz \to 0$ y $\oint_{\Gamma_4} e^{-z^2}dz \to 0$, luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{\pm 2ibx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)dx = e^{-b^2}\sqrt{\pi}.$$

iii. Considere la función definida por $f(z) = \oint_\gamma \dfrac{3w^2+7w+1}{w-z}dw$, donde γ es el círculo de radio 3 centrado en el origen. Use la fórmula integral de Cauchy para calcular $f'(1+i)$.

iv. Encuentre el punto del dominio $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ en el que el polinomio $p(z) = z^2 + 3z - 1$ alcanza su módulo máximo.

v. Demuestre que si $f(z)$ es entera y $\frac{f(z)}{z^n}$ es acotada para $|z| \geq R$ entonces $f(z)$ es un polinomio de grado menor o igual a n.