Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Cálculo en Variable Compleja – Parcial 1

Febrero 27 de 2017

I. Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.

a. [2 Puntos]. $\lim_{z\to 0} \frac{\log(1-z^2)}{\operatorname{sen}^2(2z)} = \frac{1}{4}$.

b. [2 Puntos]. $\overline{e^{iz}} = e^{-i\overline{z}}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

c. [2 Puntos]. Toda función analítica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *con valores reales* es constante.

d. [2 Puntos]. La región del plano complejo definida por $R = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| \leq 2 \text{ y } |z-2i| \leq 2\}$ es un anillo.

II. Encuentre todos los números complejos z que satisfacen las siguientes ecuaciones.

a. [2 Puntos]. $z^3 + 8i = 0$.

b. [2 Puntos]. $4\cos z = 5$.

c. [2 Puntos]. $(1+z)^5 = (1-z)^5$. *Ayuda: verifique que puede dividir en ambos lados por* $1-z$ *y use las raices quintas de la unidad.*

III. Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función compleja con parte real $u(x,y) = x^3 - kxy^2$.

a. [2 Puntos]. Encuentre los valores de k para los cuales $u(x,y)$ es armónica.

b. [2 Puntos]. Encuentre un conjugado armónico $v(x,y)$ para $u(x,y)$ cuando k es uno de los valores encontrados en el punto anterior.

c. [2 Puntos]. Encuentre el dominio D en el plano complejo en el cual la función $f(z)$ es analítica y escriba la derivada de $f(z)$ como un polinomio en z en los puntos en los que existe.

IV. Considere la función $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

a. [2 Puntos]. Encuentre la imagen bajo f del círculo unitario $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

b. [2 Puntos]. Encuentre los puntos del plano en los que f *no* es analítica.

c. [2 Puntos]. Encuentre los puntos del plano en los que f *no* es conforme.

V. Considere la función $f_\alpha(z) = \log_\alpha(z+4)$, donde la rama del logaritmo está definida por un corte $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$ en el plano complejo.

a. [2 Puntos]. Calcule $f_{-\pi}(-3)$ (i.e. con $-\pi < \theta < \pi$) y trace el correspondiente corte usado en el plano complejo.

b. [2 Puntos]. Indique la rama en la que debe definirse la función $f_\alpha(z)$ para que sea analítica en $z = -5$ y se verifique que $f_\alpha(-5) = 7\pi i$, y trace el correspondiente corte usado en el plano complejo.

Solución

I.

a. Falso. Por la regla de l'Hôpital

$$\lim_{z\to 0}\frac{\log(1-z^2)}{\operatorname{sen}^2(2z)} = \lim_{z\to 0}\frac{-2z}{2(1-z^2)\operatorname{sen}(4z)} = \lim_{z\to 0}\frac{-2}{8\,\cos(4z)-4z\operatorname{sen}(4z)} = -\frac{1}{4}.$$

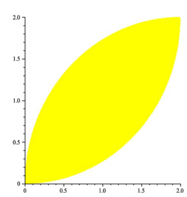
b. Verdadero. Por definición, si $z = x+iy$,

$$\overline{e^{iz}} = \overline{e^{-y+ix}} = \overline{e^{-y}(\cos x + i\operatorname{sen} x)} = e^{-y}(\cos x - i\operatorname{sen} x)$$

$$= e^{-y}(\cos(-x) + i\operatorname{sen}(-x)) = e^{-y-ix} = e^{-i(x-iy)} = e^{-i\bar{z}}.$$

c. Verdadero. Si $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ –que toma valores reales– es una función analítica y escribimos, para $z = x+iy$, $f(x,y) = u(x,y)+iv(x,y)$ tenemos que, por hipótesis $v(x,y) = 0$ y, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, así que (dado que $\mathbb{C}$ es un dominio) $f = u$ es constante.

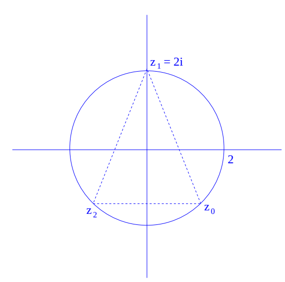
d. Falso. La región es la intersección de dos círculos concéntricos:



II.

a. Escribiendo la descomposición polar en términos del argumento principal

$$z^3 = -8i = 8e^{-\frac{i\pi}{2}},$$



así que $z = 2e^{-\frac{i\pi}{6}+\frac{2i\pi k}{3}}$, para $k = 0, 1$ y 2, es decir que las tres raices están dadas por

$$z_0 = 2e^{-\frac{i\pi}{6}},\quad z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{2}} = 2i \ \text{ y } \ z_2 = 2e^{\frac{7i\pi}{6}}.$$

b. Si $4\cos z = 2(e^{iz}+e^{-iz}) = 5$, multiplicando a ambos lados por $w = e^{iz}$ obtenemos $2w^2+2 = 5w$, luego $w = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4} = 2, \frac{1}{2}$. Así que $e^{iz} = 2, \frac{1}{2}$, es decir que $z = \pm i\log(2)$.

c. Si $(1+z)^5 = (1-z)^5$, dado que $z \neq 1$, se puede dividir en ambos lados por $1-z$ para obtener

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5 = 1,$$

así que

$$\frac{1+z}{1-z} = w_k,$$

donde w_k denota las raices quintas de la unidad para $k = 0, 1, 2, 3$ y 4. Como $w_k = e^{\frac{2i\pi k}{5}}$ tenemos que $1 + z = e^{\frac{2i\pi k}{5}}(1-z)$ para $k = 0, 1, 2, 3$ y 4, es decir que las cinco soluciones están dadas por

$$z = \frac{e^{\frac{2i\pi k}{5}} - 1}{e^{\frac{2i\pi k}{5}} + 1}.$$

III. Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función compleja con parte real $u(x,y) = x^3 - kxy^2$.

a. $u(x,y)$ es armónica si satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 2kx = 0,$$

así que $k = 3$.

b. Si $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, usando que $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$, las ecuaciones de Cauchy-Riemann dicen que $v(x,y) = 3x^2y - y^3$ es un conjugado armónico para $u(x,y)$.

c. La función $f(z) = z^3$ es analítica en todo el plano complejo, su derivada es $f'(z) = 3z^2$.

IV. Considere la función $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

a. Si $z \in S^1$ podemos escribir $z = e^{i\theta}$ para $-\pi < \theta = \arg(z) < \pi$. Entonces

$$f(z) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta,$$

luego la imagen bajo f del círculo unitario $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es el intervalo $[-2, 2] \subset \mathbb{C}$.

b. La función f *no* es analítica en $z = 0$.

c. Como $f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$, f *no* es conforme en (ningún abierto del plano complejo que contenga) los puntos $-1, 0, 1$.

V. Considere la función $f_\alpha(z) = \log_\alpha(z+4)$, donde la rama del logaritmo está definida por un corte $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$ en el plano complejo.

a. Si $-\pi < \theta < \pi$ estamos en la rama principal del logaritmo (corte usual), entonces $f_{-\pi}(-3) = \text{Log}(1) = 0$.

b. Para $\alpha = 6\pi$, la función $f_{\alpha}(z)$ es analítica en $z = -5$ y se verifique que $f_{\alpha}(-5) = 7\pi i$. El correspondiente corte usado en el plano complejo es: