Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

**Cálculo en Variable Compleja – Tarea 3**

Noviembre 5 de 2015

**1**. Use el Teorema del Residuo para demostrar las siguientes identidades:

i.
$$\int_{|z|=1} \left(z+\frac{1}{z}\right)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2\pi i n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \tag{1}$$

Ayuda: Use la expansión binomial $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$.

ii.
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k-\sin\theta} = \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{k^2-1}}, & \text{si } k>1 \\ -\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-1}}, & \text{si } k<-1. \end{cases}$$

iii.
$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+a^2}\, dx = \frac{\pi}{2a}\log a,$$

si $a>0$.

**2**. Calcule los residuos de las correspondientes funciones en los puntos singulares pertinentes, y úselos para calcular las siguientes integrales:

i. $\displaystyle\int_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1}\, dz.$

ii. $\displaystyle\int_{|z-9|=5} \frac{dz}{\sin(z^{\frac{1}{2}})}.$

iii. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sinh(\frac{1}{z})}{z-1}\, dz.$

iv. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^4\theta\, d\theta.$

v. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^m\theta\, d\theta$, para $m \geq 0$ par.

Ayuda: Use (1), i.e. el numeral i. del punto **I**.

vi. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{x^4+x^2+1}.$

**3**. **Integrales impropias y valor principal.** Si $f(x)$ es una función real, tenemos dos definiciones para la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$: La definición usual (vista en cálculo diferencial)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} f(x)\,dx,$$

y la definición vista en clase, llamada *valor principal de Cauchy* de la integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

i. Muestre que si la función $f(x)$ es impar (i.e. $f(-x) = -f(x)$) el valor principal de Cauchy de la integral es cero, y si es par (i.e. $f(-x) = f(x)$) el valor principal de Cauchy de la integral es $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$.

ii. Muestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$ no existe según la definición usual, pero si existe el valor principal de Cauchy de esta integral, y es cero.

iii. Muestre que para $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ la definición usual y el valor principal de Cauchy de la integral existen, y ambos son $\pi$.

iv. Muestre que, en general, si para $f(x)$ la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ existe en el sentido usual, entonces el valor principal de Cauchy de la integral existe, y ambos coinciden.

v. Calcule la integral $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^4}{1+x^6}\,dx$ usando residuos.

**4**. Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ un polinomio de grado $n$ con coeficientes complejos. El objetivo de este ejercicio es demostrar el *Teorema Fundamental del Álgebra*, i.e. que $p(z)$ tiene exactamente $n$ ceros en $\mathbb{C}$.

i. Sean $f(z) = a_n z^n$ y $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}$. Demuestre que, sobre un círculo $C_r(0)$ de radio $r$ centrado en 0

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|}{|a_n| r}$$

y, en consecuencia, si $r$ es lo suficientemente grande, $|g(z)| < |f(z)|$ en $C_r(0)$.

ii. Use el Teorema de Rouché para demostrar que el número de ceros de $p(z)$ dentro de $C_r(0)$ es igual al número de ceros de $f(z)$ dentro de $C_r(0)$, lo que prueba el Teorema Fundamental del Álgebra.

## Respuestas e indicaciones Punto 2.

i. Hay dos singularidades de la función $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1}$ dentro del contorno $|z-1| = \frac{3}{2}$ luego, por la fórmula del residuo,

$$\int\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1}\, dz = 2\pi i \left( \underbrace{\mathrm{Res}\left(\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1}, z=0\right)}_{-\sinh 1} + \underbrace{\mathrm{Res}\left(\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1}, z=1\right)}_{\frac{e}{2}} \right) = \frac{\pi i}{e}.$$

ii. Hay solamente una singularidad de la función $f(z) = \frac{1}{\sin(z^{\frac{1}{2}})}$ dentro del contorno $|z-9| = 5$ luego, por la fórmula del residuo,

$$\int\limits_{|z-9|=5} \frac{dz}{\sin(z^{\frac{1}{2}})} = 2\pi i \left( \left.\frac{2z^{\frac{1}{2}}}{\cos z^{\frac{1}{2}}}\right|_{\pi^2} \right) = -4\pi^2 i.$$

iii. Hay dos singularidades de la función $f(z) = \frac{\sinh(\frac{1}{z})}{z-1}$ dentro del contorno $|z| = 2$ luego, por la fórmula del residuo,

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\sinh(\frac{1}{z})}{z-1}\, dz = 2\pi i \left( \underbrace{\mathrm{Res}\left(\frac{\sinh(\frac{1}{z})}{z-1}, z=0\right)}_{-\sinh 1} + \underbrace{\mathrm{Res}\left(\frac{\sinh(\frac{1}{z})}{z-1}, z=1\right)}_{\sinh 1} \right) = 0.$$

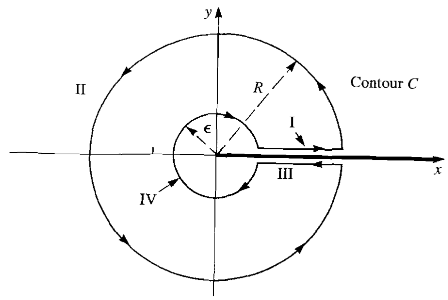
vi.

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^4\theta\, d\theta = \int_{|z|=1} \frac{(z-z^{-1})^4}{(2i)^4}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{16i}\int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^4}{z^5} dz = \frac{3\pi}{4}.$$

v. Nótese que esta integral está calculada en (1), para $m \geq 0$ par, ya que

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^m\theta\, d\theta = \int_{|z|=1} \frac{(z+\frac{1}{z})^m}{2^m}\frac{dz}{iz} = \frac{2\pi}{2^m}\frac{m!}{(\frac{m}{2})!}.$$

vi. Para calcular $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{x\, dx}{x^4+x^2+1}$ se puede considerar la integral de la función $f(z) = \dfrac{z\,\log z}{z^4+z^2+1}$ a lo largo del contorno $C$ dado por




Hay cuatro residuos por considerar (en las raices de $z^2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$) y hay que verificar que las integrales correspondientes a los límites $R \to \infty$ y $\epsilon \to 0$ son cero, el resultado es

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$