Cálculo Variable Compleja

Solución Tarea 2

Santiago Arango P. - `s.arango995@uniandes.edu.co`

Agosto de 2015

1. Demuestre las siguientes afirmaciones:

i. Si f es una función entera, tal que $|f(z)| \geq 1$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.

Dem:

Como $|f(z)| \geq 1$ en todo $\mathbb{C}$, $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por lo tanto $g(z) = 1/f(z)$ está bien definida y es entera porque f es entera (todas las derivadas de g existen). Como g es acotada y entera, se tiene por el teorema de Liouville que $g(z) = k$, $k \in \mathbb{C}$ es constante. Necesariamente $k \neq 0$ porque de lo contrario f no estaría definida en ningún punto. Luego $f(z) = 1/g(z) = 1/k$ también es constante.

$\square$

ii. Si $f(z)$ es una función analítica en un disco abierto $D \subset \mathbb{C}$ con un cero de orden $n \in \mathbb{N}$ en $z_o \in D$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = n.$$

Dem:

Como f es analítica y tiene un cero de orden n en z_0, realizando la expansión en series de potencias se puede ver que

$$f(z) = (z - z_0)^n h(z),$$

en donde h es analítica y $h(z_0) \neq 0$. Por lo tanto

$$f'(z) = (z - z_0)^n h'(z) + n(z - z_0)^{n-1} h(z),$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z - z_0)^n h'(z) + n(z - z_0)^{n-1} h(z)}{(z - z_0)^n h(z)} = \frac{h'(z)}{h(z)} + \frac{n}{z - z_0}.$$

Como la función $h'(z)/h(z)$ es analítica en D, se tiene por el Teorema de Cauchy que

$$\int_{\partial D} \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz = 0.$$

Teniendo en cuenta la pbservación anterior, se calcula la integral:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{h'(z)}{h(z)} + \frac{n}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{n}{z - z_0}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{n}{z - z_0}\, dz = \frac{2\pi i n}{2\pi i} = n.$$

$\square$

2. Calcule **dos** de las siguientes integrales:

i. $\int_{\partial D} \frac{2}{1+z^2}\, dz$, donde D es un disco centrado en el origen de radio estrictamente mayor a 1.

Sol:

Note que $\frac{2}{1+z^2} = \frac{i}{z+i} - \frac{i}{z-i}$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $D_\varepsilon(\pm i) \subset D$.

$$\int_{\partial D} \frac{2}{1+z^2}\, dz = \int_{\partial D} \frac{i}{z+i}\, dz - \int_{\partial D} \frac{i}{z-i}\, dz = \int_{|z+i|=\varepsilon} \frac{i}{z+i}\, dz - \int_{|z-i|=\varepsilon} \frac{i}{z-i}\, dz = -2\pi + 2\pi = 0.$$

ii. $\int_{|z-1|=1} \frac{1}{z^4+i}\, dz$.

Sol:

La función $1/(z^4+1)$ tiene 4 singularidades en las raices cuartas de $-i$. Estas son precisamente $\alpha_1 = e^{3\pi i/8}, \alpha_2 = -e^{3\pi i/8}, \alpha_3 = e^{7\pi i/8}$ y $\alpha_4 = -e^{7\pi i/8}$. La única de todas ellas dentro del dominio de integración es α_4. Esto implica que la función $f(z) = (z-\alpha_1)^{-1}(z-\alpha_2)^{-1}(z-\alpha_3)^{-1}$ es analítica en $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| \le 1\}$. Por la fórmula integral de Cauchy:

$$\int_{|z-1|=1} \frac{1}{z^4+i}\, dz = \int_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{z-\alpha_4}\, dz = 2\pi i\, f(\alpha_4) = \frac{\pi}{4}\left((\sqrt{2}+1)\sqrt{2-\sqrt{2}} + i(\sqrt{2}-1)\sqrt{\sqrt{2}+2}\right).$$

iii. $\int_{|z|=4} \frac{z^3+z+1}{z^3-6z^2+5z}\, dz$.

Sol:

Note que $z^3 - 6z^2 + 5z = z(z-1)(z-5)$. Como 0, 1 y 5 no son raices del polinomio del numerador, no son singularidades aparentes. Por otra parte, es claro que las únicas singularidades en de norma menor a 4 son 0 y 1. Luego la función

$$g(z) = \frac{z^3+z+1}{z-5}$$

en analítica en el disco de radio 4 centrado en el origen. Por otra parte, como $\frac{1}{z(z-1)} = \frac{-1}{z} + \frac{1}{z-1}$, se calcula la integral por medio de la fórmula integral de Cauchy:

$$\begin{aligned}\int_{|z|=4} \frac{z^3+z+1}{z^3-6z^2+5z}\, dz = \int_{|z|=4} \frac{g(z)}{z(z-1)}\, dz = \int_{|z|=4} \frac{g(z)}{z-1}\, dz - \int_{|z|=4} \frac{g(z)}{z}\, dz &= 2\pi i(g(1) - g(0)) \\ &= 2\pi i\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right) \\ &= -\frac{11\pi i}{10}.\end{aligned}$$

iv. $\int_{|z|=4} \frac{z^3+z+1}{(z-1)^3}\, dz$.

Sol:

Llame $f(z) = z^3 + z + 1$. Por la fórmula integral de Cauchy para la segunda derivada se tiene que:

$$\int_{|z|=4} \frac{z^3+z+1}{(z-1)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(1) = 6\pi i.$$

3. Para **tres** de las siguientes series de potencias diga a qué función analítica representan, en qué disco y cuál es su radio de convergencia:

i. $\sum_{k\geq 0} z^{3k+4}$.

Sol:

$$\sum_{k\geq 0} z^{3k+4} = z^4 \sum_{k\geq 0} (z^3)^k = \frac{z^4}{1-z^3}$$

Es una serie geométrica, luego converge para $|z^3| < 1$, $|z| < 1$. Su radio de convergencia es 1 y converge en el disco $D_1(0)$.

ii. $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k}(z-i)^{2k}$.

Sol:

$$\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k}(z-i)^{2k} = \sum_{k\geq 0} \left(\frac{i}{2}\right)^{2k} (z-i)^{2k} = \frac{1}{1-\left(\frac{i}{2}(z-i)\right)^2} = \frac{4}{4+(z-i)^2}$$

Es una serie geométrica, luego converge para $|\frac{i}{2}(z-i)|^2 < 1$, es decir $|z-i| < 2$. Su radio de convergencia es 2 y converge en el disco $D_2(i)$.

iii. $\sum_{k\geq 0} 2k\, z^{2k-1}$.

Sol:

Considere la función $F(z) = 1/(1-z^2)$. Esta es analítica en $D_1(0)$ y su serie de potencias viene dada por $\sum_{k\geq 0} z^{2k}$.

$$f(z) = F'(z) = \frac{2z}{(1-z^2)^2} = \sum_{k\geq 0} \frac{d}{dz}\left(z^{2k}\right) = \sum_{k\geq 0} 2k\, z^{2k-1}.$$

Su radio y dominio de convergencia coinciden con el de F.

iv. $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{4k+2}}$.

Sol:

Recuerde que $\operatorname{sen}(z) = \displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Por lo tanto,

$$\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{4k+2}} = \operatorname{sen}(1/z^2).$$

Considere las funciones $f(z) = \sin(1/z^2)$ y $g(z) = f(1/z) = \sin(z^2)$. La función f es analítica en ∞ porque g es analítica en 0.

Como g es entera, $g(w) = \displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k w^{4k+2}}{(2k+1)!}$ en $|w| < \infty$. Esto implica que $f(w)$ converge para $|w| > 0$.

4. Para las siguientes funciones calcule la correspondiente expansión en series de potencias, indicando su radio de convergencia:

i. $f(z) = \tan z$ alrededor de $z = 0$.

Sol:

Se utiliza la notación $O(z^m)$ para representar los terminos en la serie con potencias z^k con $k \geq m$. Utilizando la serie geométrica:

$$\frac{1}{\cos(z)} = \frac{1}{1-(z^2/2!)+(z^4/4!)+O(z^6)} = 1 + \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + O(z^6)\right) + \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + O(z^6)\right)^2 + O(z^6)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{24}z^4 + O(z^6).$$

Por lo tanto, como $\tan(z) = \sin(z)/\cos(z)$:

$$\tan(z) = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(7)\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{24}z^4 + O(z^6)\right) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + O(z^7).$$

La función $\tan(z)$ es analítica en el disco $D_{\pi/2}(0)$.

ii. $f(z) = \sin(z^2)$ alrededor de $z = \sqrt{n\pi}$. Como $\sin(z)$ y z^2 son funciones enteras, f también es entera y su radio de convergencia es $R = \infty$.

La serie de potencias de f centrada en $\sqrt{n\pi}$ viene dada por

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} c_k (z-\sqrt{n\pi})^k, \qquad c_k = \frac{f^{(k)}(\sqrt{n\pi})}{k!}.$$

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{f(\sqrt{n\pi}}{0!} = \sin(n\pi) = 0.\\
c_1 &= \frac{f'(\sqrt{n\pi})}{1!} = 2\sqrt{n\pi}\cos(n\pi) = 2\sqrt{n\pi}(-1)^n.\\
c_2 &= \frac{f''(\sqrt{n\pi})}{2!} = \cos(n\pi) - 2\pi\sin(n\pi) = (-1)^n.\\
c_3 &= \frac{f'''(\sqrt{n\pi})}{3!} = -\frac{4\sqrt{n\pi}}{3!}(3\sin(n\pi) + 2n\pi\cos(n\pi)) = \frac{4(n\pi)^{3/2}}{3}(-1)^{n+1}.\\
c_4 &= \frac{f^{(4)}(\sqrt{n\pi})}{4!} = \frac{6}{4!}(-4n\pi(-1)^n - 24n\pi(-1)^n) = 7n\pi(-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
f(z) = 2\sqrt{n\pi}(-1)^n(z-\sqrt{n\pi}) + (-1)^n(z-\sqrt{n\pi})^2&\\
+ \frac{4(n\pi)^{3/2}}{3}(-1)^{n+1}(z-\sqrt{n\pi})^3 + 7n\pi(-1)^{n+1}(z-\sqrt{n\pi})^4 + O(z^5).&
\end{aligned}$$

iii. $f(z) = \frac{1}{z\sin z}$ alrededor de $z = 0$.

Se sigue el mismo procedimiento del punto (4.i), esta vez con $1/\sin(z)$.

$$\frac{1}{z\sin(z)} = \frac{1}{z\,(z - z^3/3! + z^5/5! + O(z^7))} = \frac{1}{z^2\,(1 - z^2/3! + z^4/5! + O(z^6))}$$

$$= \frac{1}{z^2}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + O(z^6)\right)}\right] = \frac{1}{z^2}\left[1 + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + O(z^6)\right) + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + O(z^6)\right)^2 + O(z^6)\right]$$

$$= \frac{1}{z^2}\left[1 + \frac{z^2}{3!} + \left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right)z^4 + O(z^6)\right] = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} + \left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right)z^2 + O(z^4).$$