Cálculo Variable Compleja

Solución Tarea 1

Santiago Arango P. - s.arango995@uniandes.edu.co

Agosto de 2015

1. Demuestre las siguientes afirmaciones:

i. Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $||z| - |w|| \leq | z - w |$.

$\longrightarrow$ Dem:

Por la desigualdad triangular ($| z + w | \leq | z | + | w |$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$) se tiene que:

$$| z | = | z - w + w | \leq | z - w | + | w | .$$

Pasando $| w |$ a restar, se obtiene:

$$| z | - | w | \leq | z - w | \tag{1}$$

Cambiando z por w en el proceso anterior se obtiene:

$$| w | - | z | \leq | z - w | \tag{2}$$

Ahora recuerde que si $r, a \in \mathbb{R}$ cumplen $r > a$ y $r > -a$ entonces $r > |a|$. En este caso, $r = | z - w |$ y $a = | z | - | w |$. Luego se tiene el resultado. $\square$

ii. Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $|z - w| \geq |z| - |w|$.

La prueba de la desigualdad (1) en el problema anterior prueba este ejercicio.

iii. Dos números complejos z_1 y z_2 son múltiplos positivos el uno del otro si y solamente si $z_1\bar{z}_2$ es real y positivo.

$\longrightarrow$ Dem:

($\Rightarrow$) Suponga que existe $\gamma \in (0, \infty)$ tal que $z_1 = \gamma z_2$. Entonces:

$$z_1\bar{z}_2 = (\gamma z_2)\bar{z}_2 = \gamma \mid z_2 \mid^2 > 0.$$

($\Leftarrow$) Suponga que $z_1\bar{z}_2 = \alpha \in \mathbb{R}$.

$$z_1\bar{z}_2 = \alpha \implies z_1\bar{z}_2 z_2 = \alpha z_2 \implies z_1 \mid z_2 \mid^2 = \alpha z_2 \implies z_1 = \left(\frac{\alpha}{|z_2|^2}\right) z_2$$

como $z_2 \neq 0$, $\dfrac{\alpha}{|z_2|^2} \in (0, \infty)$. Luego z_1 y z_2 son múltiplos positivos como se quería mostrar. $\square$

iv. Si dos números complejos z_1 y z_2 son vistos como vertores en $\mathbb{R}^2$ su producto punto es igual a $Re(z_1\bar{z}_2)$, así que son perpendiculares si y solo si $z_1\bar{z}_2$ es un imaginario puro.

$\longrightarrow$ Dem:

Sean $z = (a, b), w = (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Se calcula el producto punto:

$$z \cdot w = (a, b) \cdot (c, d) = ac + bd.$$

Por otra parte, viendo a z, w como elementos de $\mathbb{C}$:

$$Re(z\bar{w}) = Re((a + ib)(c + id)) = Re(ac + bd + (cb - ad)i) = ac + bd. \ \square$$

v. Si un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ con coeficientes reales tiene una raiz compleja z, entonces $\bar{z}$ también es una raiz de $p(x)$.

$\longrightarrow$ Dem:

El conjugado complejo distribuye sobre la suma y el producto de números complejos. Además, para todo número real α es claro que $\bar{\alpha} = \alpha$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 0 = \bar{0} = \overline{p(z)} &= \overline{a_0 + a_1z + ... + a_nz^n} \\ &= \bar{a_0} + \overline{a_1z} + ... + \overline{a_nz^n} \\ &= \bar{a_0} + \bar{a_1}\bar{z} + ... + \bar{a_n}\overline{z^n} \\ &= a_0 + a_1\bar{z} + ... + a_n\bar{z}^n = p(\bar{z}). \ \square \end{aligned}$$

vi. Si una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $w \in \mathbb{C}$, entonces la sucesión de números reales $\{| z_n |\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $| w |$.

$\longrightarrow$ Dem:

Si $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $w \in \mathbb{C}$, por definición, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ que cumple la siguiente condición:

$$\text{Si } m \geq N, \quad \text{entonces} \quad | z_m - w | < \epsilon.$$

Por el problema (1.i), $| \, |z_m| - |w| \, | \leq | z_m - w |$, luego se cumple automáticamente que:

$$\text{Si } m \geq N, \quad \text{entonces} \quad | \, |z_m| - |w| \, | < \epsilon.$$

Por lo tanto, $\{| z_n |\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $| w |$ como se quería mostrar. $\square$

vii. El radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n)^n z^n$ es $\frac{1}{2}$.

$\longrightarrow$ Dem:

Por el criterio de la raiz, la serie converge para aquellos $z \in \mathbb{C}$ tales que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{| (1 + (-1)^n)^n z^n |} < 1$.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{| (1 + (-1)^n)^n z^n |} &= \sqrt[n]{| (1 + (-1)^n) |^n | z |^n} \\ &= | (1 + (-1)^n) | \, |z| \\ &\leq (|1| + | - 1|^n)|z| = 2|z| < 1 \quad (\text{desigualdad } \triangle). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie de potencias converge para todo $|z| < \frac{1}{2}$. $\square$

viii. La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge en todos los puntos del círculo unitario salvo en $z = 1$.

$\longrightarrow$ Dem:

Aplicando el criterio de la razón a la serie real $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{|z|^n}{n} \cdot \frac{n+1}{|z|^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) |z| = |z| < 1.$$

Luego la serie converge (y por consiguiente convergente) absolutamente para $|z| < 1$. El criterio no da información sobre la convergencia para $|z| = 1$, sin embargo sabemos que para $z = 1$ la serie diverge, pues es la serie armónica. (Falta mostrar que para $z \neq 1$, $|z| = 1$ también converge). $\square$

2. Calcule los siguientes números:

i. $(1+i)^4 = (\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}})^4 = 4e^{i\pi} = -4$.

ii. $\log(1+i) = \log(\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$.

iii. $i^i = (e^{i\frac{\pi}{2}})^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

iv. $(1+i)^i = e^{i\log(1+i)} = e^{i[\log(\sqrt{2})+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k)]} = e^{-\frac{\pi}{4}}e^{i\log(\sqrt{2})}$.