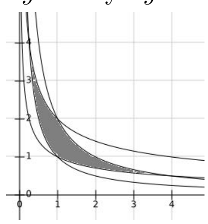
Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. Firme y entregue el enunciado junto a la hoja de examen. **Tiempo máximo 1 hora y 20 minutos.**

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1. i. Calcule la integral doble $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \cos(y^3)\, dy\, dx$.

   ii. Calcule la integral doble $\iint_D y^2\, dA$, donde el dominio D es el acotado por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $xy^2 = 1$ y $xy^2 = 2$.



   (8 puntos)

2. Considere la superficie S del paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$.

   i. Encuentre la recta normal a la superficie en el punto $(1, 1, 0)$.

   ii. Encuentre el plano tangente a la superficie en el punto $(1, 1, 0)$.

   iii. Calcule el área de la superficie S_o del paraboloide encerrada en el cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

   iv. Calcule el volumen bajo S_o y sobre el plano x-y.

   v. Calcule la integral $\iint_{S_o} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ para el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle y, x, xy\rangle$, con respecto a la normal con componente z positiva.

   (15 puntos)

3. Considere la curva en el plano $\mathbb{R}^2$ parametrizada por $\mathbf{c}(t) = \langle \cos\left(\frac{t}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\rangle$, para $t \in [0, 2\pi]$.

   i. Calcule la integral de trayectoria $\int_{\mathbf{c}} f ds$ para el campo escalar $f(x, y) = x^2 y$.

   ii. Calcule la integral de línea $\int_{\mathbf{c}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ para el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} f = \langle 2xy, x^2\rangle$.

   (8 puntos)

Solución

1.

i. La integral doble $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 \cos(y^3)\,dy\,dx$ puede calcularse fácilmente haciendo un cambio en el orden de integración:

$$\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 \cos(y^3)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{y^2} \cos(y^3)\,dx\,dy = \int_0^1 y^2\cos(y^3)\,dy = \frac{1}{3}\mathrm{sen}\,(1).$$

ii. La integral doble $\iint_D y^2\,dA$, donde el dominio D es el acotado por las curvas $xy=1$, $xy=2$, $xy^2=1$ y $xy^2=2$, puede calcularse haciendo el cambio de variable

$$u = xy, \quad v = xy^2,$$

cuyo Jacobiano es $|J| = \frac{1}{v}$, obteniendo como región de integración $1\le u\le 2,\ 1\le v\le 2$. Así,

$$\iint_D y^2\,dA = \int_1^2\int_1^2 \left(\frac{v}{u}\right)^2\frac{1}{v}\,du\,dv = \int_1^2\int_1^2 \frac{v}{u^2}du\,dv = \int_1^2 \frac{v}{2}dv = \frac{3}{4}.$$

2. Considere la superficie S del paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ parametrizada como una gráfica:

$$\Phi(x,y) = \langle x, y, y^2 - x^2\rangle.$$

i. La recta normal a la superficie en el punto $(1,1,0)$ se encuentra calculando el vector normal (interior o exterior) a la superficie en ese punto. Tal normal puede calcularse de varias formas: Calculando el gradiente de la función $F(x,y,z) = x^2 - y^2 - z$ en el punto,

$$\vec{\nabla}F\,|_{(1,1,0)} = \langle 2x, -2y, -1\rangle\,|_{(1,1,0)},$$

o mediante la parametrización dada:

$$\vec{\mathbf{N}}\,|_{(1,1,0)} = \Phi_x\times\Phi_y = \langle -2x, 2y, 1\rangle\,|_{(1,1,0)}\ .$$

En cualquier caso $\vec{\mathbf{N}} = \pm\langle 2,-2,-1\rangle$ así que la recta normal se escribe como

$$\vec{x} = \langle 1,1,0\rangle + t\langle 2,-2,-1\rangle,$$

para $t\in\mathbb{R}$.

ii. La ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(1,1,0)$ se obtiene a partir del vector normal y el punto:

$$\langle 2,-2,-1\rangle\cdot\langle x-1, y-1, z-0\rangle = 2x - 2y + z = 0.$$

iii. El área de la superficie S_o del paraboloide encerrada en el cilindro $x^2+y^2=4$ se calcula, mediante la parametrización dada, usando la integral

$$A = \iint_S \|\Phi_x\times\Phi_y\|\,dxdy = \iint_S (1+4x^2+4y^2)^{\frac{1}{2}}\,dxdy$$

que, en coordenadas polares, se escribe como

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (1+4r^2)^{\frac{1}{2}} r\,drd\theta = 2\pi\int_0^2(1+4r^2)^{\frac{1}{2}} r\,dr = \frac{2\pi}{12}[(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}]_0^2 = \frac{\pi}{6}[17^{\frac{3}{2}}-1].$$

iv. Para calcular el volumen bajo S_o y sobre el plano x-y es necesario observar que parte de la superficie se encuentra *bajo* el plano x-y, y no debe ser tenida en cuenta (de lo contrario tendríamos que tal volumen es igual a cero). De hecho, $z\ge 0$ solamente cuando $y^2\ge x^2$, así que para calcular el volumen podemos escribir

$$V = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^2 r^2(\mathrm{sen}^2\theta - \cos^2\theta) r\,dr\,d\theta = -2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^2 r^3\cos(2\theta)\,dr\,d\theta = -8\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos(2\theta)\,d\theta = (-4)\,\mathrm{sen}\,(2\theta)\,|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 8.$$

v. Finalmente, la integral $\iint_{S_o} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$ para el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle y, x, xy \rangle$, con respecto a la normal con componente z positiva se calcula como

$$\iint_{S_o} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{D_o} \mathbf{F}(\Phi(x,y)) \cdot \Phi_x \times \Phi_y \, dx\, dy = \iint_{D_o} \langle y, x, xy \rangle \cdot \langle 2x, -2y, 1 \rangle \, dx\, dy = \iint_{D_o} xy \, dx\, dy$$

que, en coordenadas polares, es

$$\iint_{S_o} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 \operatorname{sen} 2\theta \, dr d\theta = 0.$$

3. Sea $\mathbf{c}(t) = \langle \cos\left(\frac{t}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \rangle$, para $t \in [0, 2\pi]$, entonces $\mathbf{c}'(t) = \langle -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right), \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right) \rangle$ y $\|\mathbf{c}'(t)\| = \frac{1}{2}$.

i. La integral de trayectoria $\int_{\mathbf{c}} f ds$ para el campo escalar $f(x,y) = x^2 y$ es, por definición,

$$\int_{\mathbf{c}} f ds = \int_0^{2\pi} f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{2}{3}.$$

ii. La integral de línea $\int_{\mathbf{c}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$ para el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} f = \langle 2xy, x^2 \rangle$ es, por el teorema fundamental de las integrales de línea,

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \vec{\nabla} f \cdot d\mathbf{s} = f(\mathbf{c}(2\pi)) - f(\mathbf{c}(0)) = \cos^2(\pi) \operatorname{sen}(\pi) - \cos^2(0) \operatorname{sen}(0) = 0,$$

aunque la curva *no* es cerrada.