Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. Firme y entregue el enunciado junto a la hoja de examen. **Tiempo máximo** 1 **hora y** 20 **minutos.**

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1. Uno de los siguientes límites **no existe**, diaga cuál es y por qué:

$$(a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}, \qquad (b) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(4 puntos)

2. Considere las funciones $f(x,y) = \langle e^{x+y}, x^2y\rangle$ y $g(u,v) = \langle \ln u, v^2 - \operatorname{sen} u\rangle$.

   i. Escriba una fórmula para la función compuesta $f \circ g$.

   ii. Calcule, usando la regla de la cadena, $D(f \circ g)(\pi, 0)$, es decir la derivada de la función compuesta en el punto $(\pi, 0)$.

(6 puntos)

3. Considere las superficies esféricas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4y$ en $\mathbb{R}^3$.

   i. Demuestre que el punto $(0, 1, \sqrt{3})$ está en ambas superficies.

   ii. Encuentre la ecuación del plano tangente a cada esfera en este punto.

   iii. Encuentre la ecuación de la recta de intersección de estos dos planos en el espacio.

(6 puntos)

4. Considere la función $f(x,y) = 2xy - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}y^4 + 1$.

   i. Encuentre y clasifique (en máximos, mínimos, puntos de silla) los puntos críticos de f.

   ii. Encuentre los extremos absolutos de f sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 2$.

(10 puntos)

5. Considere el campos vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \langle x^3y, xz, yz^3\rangle$.

   i. Demuestre que el campo $\vec{\mathbf{F}}$ **no** es un gradiente (i.e. **no** existe un campo escalar f para el cual $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} f$).

   ii. Demuestre que el campo $\vec{\mathbf{F}}$ **no** es un rotacional (i.e. **no** existe un campo vectorial $\vec{\mathbf{G}}$ para el cual $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{G}}$).

(4 puntos)

Solución

1. El límite que no existe es el del enunciado *(a)*, i.e. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$. En efecto, es fácil darse cuenta de que evaluando este límite por caminos diferentes se obtienen resultados diferentes; por ejemplo se obtendría como límite el valor 0 al evaluarse sobre la recta $x = y$, pero se obtendría 2 al evaluarse sobre la recta $x = -y$.

2. i. Sean $f(x, y) = \langle e^{x+y}, x^2 y\rangle$ y $g(u, v) = \langle \ln u, v^2 - \operatorname{sen} u\rangle$. Entonces la función compuesta $f \circ g$ está dada por

$$\begin{aligned} f \circ g(u,v) &= f(g(u,v)) = f\left(\ln u, v^2 - \operatorname{sen} u\right) = \langle e^{\ln u + v^2 - \operatorname{sen} u}, (\ln u)^2(v^2 - \operatorname{sen} u)\rangle \\ &= \langle u e^{v^2 - \operatorname{sen} u}, (\ln u)^2(v^2 - \operatorname{sen} u)\rangle. \end{aligned}$$

ii. Para calcular $D(f \circ g)(\pi, 0)$, usando la regla de la cadena, dado que $g(\pi, 0) = (\ln \pi, 0)$, es necesario calcular las matrices $Df\mid_{(\ln\pi,0)}$ y $Dg\mid_{(\pi,0)}$. Primero,

$$Df\mid_{(\ln\pi,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}\Big|_{(\ln\pi,0)} = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}\Big|_{(\ln\pi,0)} = \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ 0 & (\ln\pi)^2 \end{pmatrix}$$

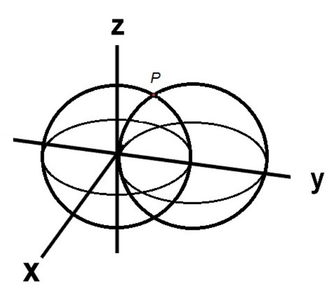
y, para $g(u, v)$,

$$Dg\mid_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix}\Big|_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 0 \\ -\cos u & 2v \end{pmatrix}\Big|_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$D(f \circ g)(\pi,0) = Df\mid_{(\ln\pi,0)} \cdot Dg\mid_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ 0 & (\ln\pi)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\pi & 0 \\ (\ln\pi)^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Las superficies esféricas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4y$ en $\mathbb{R}^3$ se intersectan como ilustra la figura:



i. Para demostrar que el punto $P = (0, 1, \sqrt{3})$ está en ambas superficies es suficiente verificar que tales coordenadas satisfacen ambas ecuaciones, y evidentemente en ambos casos $0^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$.

ii. Para encontrar la ecuación del plano tangente a cada esfera en el punto P, calculamos el gradiente de las funciones $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y $F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4y$, lo que nos da un vector normal al plano tangente a cada esfera en el punto deseado:

$$\vec{\nabla} F_1\mid_P = \langle 2x, 2y, 2z\rangle\mid_P = \langle 0, 2, 2\sqrt{3}\rangle,$$

y

$$\vec{\nabla} F_2\mid_P = \langle 2x, 2y-4, 2z\rangle\mid_P = \langle 0, -2, 2\sqrt{3}\rangle.$$

Así, junto con el punto, tenemos la información necesaria para escribir la ecuación de cada plano:

$$2(y-1) + 2\sqrt{3}(z-\sqrt{3}) = 0 \quad \text{y} \quad -2(y-1) + 2\sqrt{3}(z-\sqrt{3}) = 0,$$

luego tales ecuaciones son $2y + 2\sqrt{3}z = 8$ y $-2y + 2\sqrt{3}z = 4$, respectivamente.

iii. La ecuación de la recta de intersección de estos dos planos en el espacio está determinada por el punto $P = (0, 1, \sqrt{3})$ y un vector director, que puede ser calculado de varias formas: encontrando la recta de intersección a los dos planos anteriores o calculando el producto cruz de los vectores normales a los planos encontrados anteriormente. Si hacemos esto último tenemos que $\vec{\nabla} F_1 \mid_P \times \vec{\nabla} F_2 \mid_P = \langle 8\sqrt{3}, 0, 0\rangle$, así que la recta que buscamos tiene como ecuación vectorial

$$\vec{x}(t) = \langle 0, 1, \sqrt{3}\rangle + t\langle 8\sqrt{3}, 0, 0\rangle,$$

donde $t \in \mathbb{R}$.

4. i. Para encontrar los puntos críticos de la función $f(x, y)$ calculamos su gradiente y lo igualamos a cero:

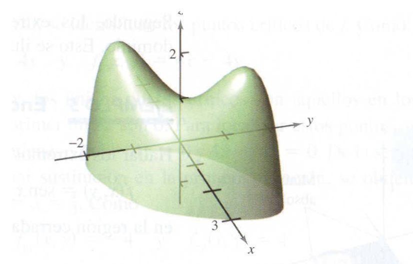
$$\vec{\nabla} f(x, y) = \langle 2y - 2x^3, 2x - 2y^3\rangle = \langle 0, 0\rangle,$$

lo que implica que $x^3 = y$ y $y = x^3$, es decir que $y^9 = y$ o, lo que es lo mismo, $y(y^8 - 1) = 0$ La primera opción es que $y = 0$, caso en el cual la primera ecuación implica que $x = 0$ y nos da como primer punto crítico $(0, 0)$; la segunda opción es que $y = 1$, caso en el cual la primera ecuación implica que $x = 1$; finalmente la tercera opción es que $y = -1$, caso en el cual la primera ecuación implica que $x = -1$ y, en consecuencia, tenemos dos puntos críticos más, $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.

Los puntos críticos son *extremos* (máximos o mínimos locales) de f cuando el determinante de la matriz de segundas derivadas

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x^2 & 2 \\ 2 & -6y^2 \end{pmatrix}$$

es positivo, lo cual es cierto en $(1, 1)$ y $(-1, -1)$. En $(0, 0)$ tal determinante es negativo, luego es un *punto de silla*. Finalmente, en $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ hay máximos locales pues $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ en esos puntos. Un boceto de la gráfica de la función es



ii. Si restringimos f a puntos sobre el círculo $x^2 + y^2 = 2$, según los resultados vistos en clase, tendremos extremos absolutos. Para encontrarlos, usando multiplicadores de Lagrange con las funciones $f(x, y) = 2xy - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}y^4 + 1$ y $g(x, y) = x^2 + y^2 = 2$, tendremos que $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$, es decir

$$\langle 2y - 2x^3, 2x - 2y^3\rangle = \lambda\langle 2x, 2y\rangle.$$

Despejando λ de las dos ecuaciones que resultan de esta ecuación tenemos que

$$\frac{2y - 2x^3}{2x} = \frac{2x - 2y^3}{2y},$$

osea que $xy(y^2 - x^2) = x^2 - y^2$. La opción $xy = -1$ en la restricción no da lugar a soluciones reales, mientras que $x^2 - y^2 = 0$ implica que los puntos a considerar son $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ y $(-1, -1)$. Evaluando en los puntos tendremos que $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ son máximos absolutos miemtras que $(1, -1)$ y $(-1, 1)$ son mínimos absolutos.

5. Sea $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = \langle x^3 y, xz, yz^3\rangle$.

i. El campo $\vec{\mathbf{F}}$ **no** es un gradiente (i.e. **no** existe un campo escalar f para el cual $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} f$) porque su rotacional es diferente de cero: $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} = \langle z^3 - x, 0, z - x^3\rangle \neq \vec{0}$.

ii. El campo $\vec{\mathbf{F}}$ **no** es un rotacional (i.e. **no** existe un campo vectorial $\vec{\mathbf{G}}$ para el cual $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{G}}$) porque su divergencia no es cero: $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{F}} = 3x^2 y + x + 3yz^2 \neq 0$.

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. Firme y entregue el enunciado junto a la hoja de examen. **Tiempo máximo** 1 **hora y** 20 **minutos.**

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1. Uno de los siguientes límites **no existe**, diaga cuál es y por qué:

$$(a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad\qquad (b) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}.$$

(4 puntos)

2. Considere las funciones $f(x,y) = \langle e^{x+y}, xy^2 \rangle$ y $g(u,v) = \langle \ln u, v^2 - \operatorname{sen} u \rangle$.
   i. Escriba una fórmula para la función compuesta $f \circ g$.
   ii. Calcule, usando la regla de la cadena, $D(f \circ g)(\pi, 0)$, es decir la derivada de la función compuesta en el punto $(\pi, 0)$.

(6 puntos)

3. Considere las superficies esféricas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4y$ en $\mathbb{R}^3$.
   i. Demuestre que el punto $(0, 1, \sqrt{3})$ está en ambas superficies.
   ii. Encuentre la ecuación del plano tangente a cada esfera en este punto.
   iii. Encuentre la ecuación de la recta de intersección de estos dos planos en el espacio.

(6 puntos)

4. Considere la función $f(x,y) = 2xy - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}y^4 + 1$.
   i. Encuentre y clasifique (en máximos, mínimos, puntos de silla) los puntos críticos de f.
   ii. Encuentre los extremos absolutos de f sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 2$.

(10 puntos)

5. Considere el campos vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \langle xy, x^3z^3, yz \rangle$.
   i. Demuestre que el campo $\vec{\mathbf{F}}$ **no** es un gradiente (i.e. **no** existe un campo escalar f para el cual $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} f$).
   ii. Demuestre que el campo $\vec{\mathbf{F}}$ **no** es un rotacional (i.e. **no** existe un campo vectorial $\vec{\mathbf{G}}$ para el cual $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{G}}$).

(4 puntos)

Solución

1. El límite que no existe es el del enunciado *(b)*, i.e. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$. En efecto, es fácil darse cuenta de que evaluando este límite por caminos diferentes se obtienen resultados diferentes; por ejemplo se obtendría como límite el valor 0 al evaluarse sobre la recta $x = y$, pero se obtendría 2 al evaluarse sobre la recta $x = -y$.

2. i. Sean $f(x,y) = \langle e^{x+y}, xy^2\rangle$ y $g(u,v) = \langle \ln u, v^2 - \operatorname{sen} u\rangle$. Entonces la función compuesta $f \circ g$ está dada por

$$\begin{aligned} f \circ g(u,v) &= f(g(u,v)) = f\left(\ln u, v^2 - \operatorname{sen} u\right) = \langle e^{\ln u + v^2 - \operatorname{sen} u}, (\ln u)(v^2 - \operatorname{sen} u)^2\rangle \\ &= \langle u e^{v^2 - \operatorname{sen} u}, (\ln u)(v^2 - \operatorname{sen} u)^2\rangle. \end{aligned}$$

ii. Para calcular $D(f\circ g)(\pi,0)$, usando la regla de la cadena, dado que $g(\pi,0) = (\ln \pi, 0)$, es necesario calcular las matrices $Df\mid_{(\ln\pi,0)}$ y $Dg\mid_{(\pi,0)}$. Primero,

$$Df\mid_{(\ln\pi,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}\mid_{(\ln\pi,0)} = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}\mid_{(\ln\pi,0)} = \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

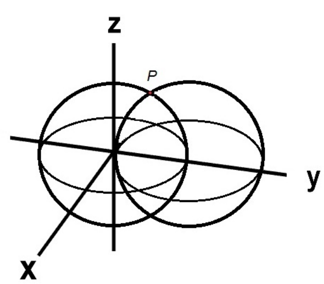
y, para $g(u,v)$,

$$Dg\mid_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix}\mid_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 0 \\ -\cos u & 2v \end{pmatrix}\mid_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$D(f\circ g)(\pi,0) = Df\mid_{(\ln\pi,0)} \cdot Dg\mid_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Las superficies esféricas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4y$ en $\mathbb{R}^3$ se intersectan como ilustra la figura:



i. Para demostrar que el punto $P = (0, 1, \sqrt{3})$ está en ambas superficies es suficiente verificar que tales coordenadas satisfacen ambas ecuaciones, y evidentemente en ambos casos $0^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$.

ii. Para encontrar la ecuación del plano tangente a cada esfera en el punto P, calculamos el gradiente de las funciones $F_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ y $F_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4y$, lo que nos da un vector normal al plano tangente a cada esfera en el punto deseado:

$$\vec{\nabla} F_1\mid_P = \langle 2x, 2y, 2z\rangle\mid_P = \langle 0, 2, 2\sqrt{3}\rangle,$$

y

$$\vec{\nabla} F_2\mid_P = \langle 2x, 2y-4, 2z\rangle\mid_P = \langle 0, -2, 2\sqrt{3}\rangle.$$

Así, junto con el punto, tenemos la información necesaria para escribir la ecuación de cada plano:

$$2(y-1) + 2\sqrt{3}(z - \sqrt{3}) = 0 \quad \text{y} \quad -2(y-1) + 2\sqrt{3}(z-\sqrt{3}) = 0,$$

luego tales ecuaciones son $2y + 2\sqrt{3}z = 8$ y $-2y + 2\sqrt{3}z = 4$, respectivamente.

iii. La ecuación de la recta de intersección de estos dos planos en el espacio está determinada por el punto $P = (0, 1, \sqrt{3})$ y un vector director, que puede ser calculado de varias formas: encontrando la recta de intersección a los dos planos anteriores o calculando el producto cruz de los vectores normales a los planos encontrados anteriormente. Si hacemos esto último tenemos que $\vec{\nabla} F_1 \mid_P \times \vec{\nabla} F_2 \mid_P = \langle 8\sqrt{3}, 0, 0\rangle$, así que la recta que buscamos tiene como ecuación vectorial

$$\vec{x}(t) = \langle 0, 1, \sqrt{3}\rangle + t\langle 8\sqrt{3}, 0, 0\rangle,$$

donde $t \in \mathbb{R}$.

4. i. Para encontrar los puntos críticos de la función $f(x, y)$ calculamos su gradiente y lo igualamos a cero:

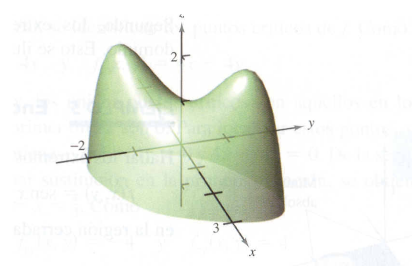
$$\vec{\nabla} f(x, y) = \langle 2y - 2x^3, 2x - 2y^3\rangle = \langle 0, 0\rangle,$$

lo que implica que $x^3 = y$ y $y = x^3$, es decir que $y^9 = y$ o, lo que es lo mismo, $y(y^8 - 1) = 0$ La primera opción es que $y = 0$, caso en el cual la primera ecuación implica que $x = 0$ y nos da como primer punto crítico $(0, 0)$; la segunda opción es que $y = 1$, caso en el cual la primera ecuación implica que $x = 1$; finalmente la tercera opción es que $y = -1$, caso en el cual la primera ecuación implica que $x = -1$ y, en consecuencia, tenemos dos puntos críticos más, $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.

Los puntos críticos son *extremos* (máximos o mínimos locales) de f cuando el determinante de la matriz de segundas derivadas

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x^2 & 2 \\ 2 & -6y^2 \end{pmatrix}$$

es positivo, lo cual es cierto en $(1, 1)$ y $(-1, -1)$. En $(0, 0)$ tal determinante es negativo, luego es un *punto de silla*. Finalmente, en $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ hay máximos locales pues $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ en esos puntos. Un boceto de la gráfica de la función es



ii. Si restringimos f a puntos sobre el círculo $x^2 + y^2 = 2$, según los resultados vistos en clase, tendremos extremos absolutos. Para encontrarlos, usando multiplicadores de Lagrange con las funciones $f(x, y) = 2xy - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}y^4 + 1$ y $g(x, y) = x^2 + y^2 = 2$, tendremos que $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$, es decir

$$\langle 2y - 2x^3, 2x - 2y^3\rangle = \lambda\langle 2x, 2y\rangle.$$

Despejando λ de las dos ecuaciones que resultan de esta ecuación tenemos que

$$\frac{2y - 2x^3}{2x} = \frac{2x - 2y^3}{2y},$$

osea que $xy(y^2 - x^2) = x^2 - y^2$. La opción $xy = -1$ en la restricción no da lugar a soluciones reales, mientras que $x^2 - y^2 = 0$ implica que los puntos a considerar son $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ y $(-1, -1)$. Evaluando en los puntos tendremos que $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ son máximos absolutos miemtras que $(1, -1)$ y $(-1, 1)$ son mínimos absolutos.

5. Sea $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = \langle xy, x^3 z^3, yz\rangle$.

i. El campo $\vec{\mathbf{F}}$ **no** es un gradiente (i.e. **no** existe un campo escalar f para el cual $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} f$) porque su rotacional es diferente de cero: $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} = \langle z - 3x^3 z^2, 0, 3x^2 z^3 - x\rangle \neq \vec{0}$.

ii. El campo $\vec{\mathbf{F}}$ **no** es un rotacional (i.e. **no** existe un campo vectorial $\vec{\mathbf{G}}$ para el cual $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{G}}$) porque su divergencia no es cero: $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{F}} = 2y \neq 0$.