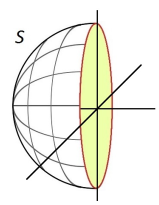
Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. **Tiempo máximo** 1 **hora y** 20 **minutos.**

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1. La integral $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_1^3 \operatorname{sen}(y^2)\,dz\,dy\,dx$ calcula la masa de un sólido Q cuya densidad es $\rho(x,y,z) = \operatorname{sen}(y^2)$, haga una gráfica del sólido y calcule su masa. (6 puntos)

2. Calcule la integral
$$\iint_D (x-y)^2\,dA,$$
donde la región D es el paralelogramo $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x-y\le 2,\ 0\le x+y\le 2\}$. (6 puntos)

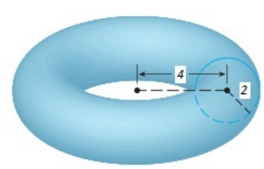
3. Considere el campo vectorial $\mathbf{F} = \langle xz^2, 0, x^2z\rangle$,
la curva
$$\mathbf{c}(t) = \langle \cos t, 0, \operatorname{sen} t\rangle,$$
para $t\in[0,2\pi]$, y la superficie hemisférica S mostrada en la figura (media esfera de radio 1).



   i. Calcule la integral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$.
   ii. Calcule la integral $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

   (8 puntos)

4. Considere la superficie del toro T indicada en la figura, parametrizada por
$$x = (4+2\cos\phi)\cos\theta,\quad y = (4+2\cos\phi)\operatorname{sen}\theta,\quad z = 2\operatorname{sen}\phi,$$
para $0\le\theta\le 2\pi$ y $0\le\phi\le 2\pi$.

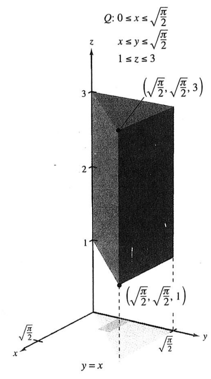


   i. Demuestre que el punto $(0,5,\sqrt{3})$ se encuentra sobre la superficie.
   ii. Encuentre la recta normal a la superficie en el punto $(0,5,\sqrt{3})$.
   iii. Encuentre el plano tangente a la superficie en el punto $(0,5,\sqrt{3})$.
   iv. Demuestre que el área de la superficie del toro es igual a $32\pi^2$.

   (16 puntos)

Solución

1. La integral $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_1^3 \operatorname{sen}(y^2)\,dz\,dy\,dx$ calcula la masa de un sólido Q cuya densidad es $\rho(x,y,z)=\operatorname{sen}(y^2)$, para calcularla hace falta cambiar el orden de integración :



$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_1^3 \operatorname{sen}(y^2)\,dz\,dy\,dx = 2\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \operatorname{sen}(y^2)\,dy\,dx$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_0^{y} \operatorname{sen}(y^2)\,dx\,dy = 2\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y\operatorname{sen}(y^2)\,dy$$

$$= \left[-\cos(y^2)\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 1.$$

2. La integral $\displaystyle\iint_D (x-y)^2\,dA$, donde la región D es el paralelogramo

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x-y\le 2,\ 0\le x+y\le 2\right\}$$

puede calcularse facilmente haciendo el cambio de variable

$$u=x-y,\qquad v=x+y,$$

cuyo Jacobiano es $|J|=\frac{1}{2}$, obteniendo como región de integración $0\le u\le 2,\ 0\le v\le 2$. Así,

$$\iint_D (x-y)^2\,dA = \frac{1}{2}\int_0^2\int_0^2 u^2\,du\,dv = \int_0^2 u^2\,du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

3.

i. Por definición, la integral de linea se calcula usando una parametrización de la curva (por ejemplo la dada en el enunciado, $\mathbf{c}(t)=\langle\cos t, 0, \operatorname{sen} t\rangle$, para $t\in[0,2\pi]$) como

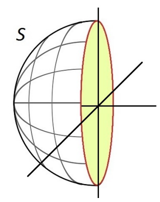
$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)dt,$$

pero es más fácil usar el teorema fundamental de las integrales de línea, ya que $\mathbf{F}=\langle xz^2, 0, x^2z\rangle = \vec{\nabla}(\frac{1}{2}x^2z^2)$ y la curva es cerrada, entonces

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \vec{\nabla}(\frac{1}{2}x^2z^2)\cdot d\mathbf{s} = \left[\frac{1}{2}x^2z^2\right]_{\mathbf{c}(0)}^{\mathbf{c}(2\pi)} = 0.$$

El cálculo directo, por supuesto, arroja el mismo resultado.

ii. Para calcular la integral $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, donde S es la superficie indicada en la fugura (media esfera de radio 1), podemos usar la parametrización en coordenadas esféricas dada por



$$x=\cos\theta\operatorname{sen}\phi,\qquad y=\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\quad\text{y}\quad z=\cos\phi,$$

para $\theta\in[\pi,2\pi]$ y $\phi\in[0,\pi]$.

Así,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \mathbf{F}(\Phi(\theta,\phi))\cdot(\mathbf{T}_\theta\times\mathbf{T}_\phi)\,d\theta d\phi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \langle \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\cos^2\phi, 0, \cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\phi\cos\phi\rangle\cdot\langle -\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\phi, -\,\mathrm{sen}\;\theta\,\mathrm{sen}^2\phi, -\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\rangle\,d\theta d\phi$$

$$= -2\int_0^{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{sen}^3\phi\cos^2\phi\cos^2\theta\,d\theta d\phi = -\pi\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^3\phi\cos^2\phi\,d\phi = -\pi\int_0^{\pi}(1-\cos^2\phi)\,\mathrm{sen}\,\phi\cos^2\phi\,d\phi$$

$$= \pi\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,\phi\cos^4\phi\,d\phi - \pi\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,\phi\cos^2\phi\,d\phi = \frac{2\pi}{5}-\frac{2\pi}{3} = -\frac{4\pi}{15}.$$

Nótese que el anterior cálculo fue hecho con la normal *interior*

$$\mathbf{T}_\theta\times\mathbf{T}_\phi = \langle -\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\phi, -\,\mathrm{sen}\;\theta\,\mathrm{sen}^2\phi, -\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\rangle = -\,\mathrm{sen}\,\phi\,\Phi(\theta,\phi),$$

con la normal exterior el resultado sería $\frac{4\pi}{15}$.

4.

i. Primero observemos que, a partir de la parametrización dada para la superficie del toro, tenemos que

$$x = (4+2\cos\phi)\cos\theta = 0, \quad y = (4+2\cos\phi)\,\mathrm{sen}\,\theta = 5, \quad z = 2\,\mathrm{sen}\,\phi = \sqrt{3},$$

se satisface cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\phi = \frac{\pi}{3}$, luego tal punto se encuentra sobre la superficie.

ii. La recta normal a la superficie en el punto $(0,5,\sqrt{3})$ se encuantra calculando el vector normal (interior o exterior) a la superficie en ese punto

$$\mathbf{T}_\theta\times\mathbf{T}_\phi|_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3})} = \langle 2(4+2\cos\phi)\cos\theta\cos\phi, 2(4+2\cos\phi)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi, 2(4+2\cos\phi)\,\mathrm{sen}\,\phi\rangle|_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3})} = \langle 0,5,5\sqrt{3}\rangle.$$

Junto con las coordenadas del punto tenemos que la ecuación vectorial de la recta normal es

$$\vec{x} = \langle 0,5,\sqrt{3}\rangle + t\langle 0,5,5\sqrt{3}\rangle,$$

para $t\in\mathbb{R}$.

iii. La ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(0,5,\sqrt{3})$ se obtiene a partir del vector normal y el punto:

$$\langle 0,5,5\sqrt{3}\rangle\cdot\langle x-0, y-5, z-\sqrt{3}\rangle = 5y+5\sqrt{3}z-40 = 0,$$

i.e. $y+\sqrt{3}z = 8$.

iv. Finalmente, el área de una superficie parametrizada está dada por

$$A = \iint_S \|\mathbf{T}_\theta\times\mathbf{T}_\phi\|\,d\theta d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} 2(4+2\cos\phi)\,d\theta d\phi = 4\pi\int_0^{2\pi}(4+2\cos\phi)\,d\phi = 32\pi^2.$$