Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo para este examen: 2 horas.

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1. Sea Ω el sólido comprendido entre la superficie $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 0$, cuya densidad de masa está dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$. Calcule la masa del sólido Ω.
(6 puntos)

2. Queremos construir una caja cilíndrica (con piso y tapa) con volumen de $0{,}25\, m^3$ y debemos encontrar las medidas (para la altura h y el radio r) que hacen que la caja tenga mínima área superficial.
   i. Plantee el problema formulándolo como una optimización con restricciones en dos variables.
   ii. Resuelva el problema mediante el método de multiplicadores de Lagrange.

   (6 puntos)

3. Considere el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle x, 0, 0 \rangle$ en $\mathbb{R}^3$.
   i. A partir de la definición de integral de superficie, calcule el flujo del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ a través del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, con respecto a la normal que apunta hacia arriba.
   ii. Enuncie el Teorema de la Divergencia y úselo para calcular la integral del enunciado anterior.

   (6 puntos)

4. Considere las superficies $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ y $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}$, ambas orientadas hacia arriba, y considere el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle -yz, y, z \rangle$.
   i. Calcule $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}}$, el rotacional del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$.
   ii. Explique por qué $\displaystyle\iint_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S}$.
   iii. Calcule la integral indicada en el enunciado anterior.

   (6 puntos)

5. Reponda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.
   i. El campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2 \rangle$ es un campo vectorial conservativo y $f(x, y, z) = xy^2z^3$ es un potencial para $\vec{\mathbf{F}}$.
   ii. Si Ω es un sólido en $\mathbb{R}^3$ que está contenido entre los planos $z = -1$ y $z = 1$, y el área de los cortes transversales de Ω (dados por los planos perpendiculares al eje z) viene dada por $A(z) = z^4 + z^2$, entonces el volumen Ω es $\dfrac{16}{15}$.
   iii. Si $\vec{\mathbf{F}}$ es un campo vectorial conservativo entonces $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{F}} = 0$.
   iv. Si $\mathbf{c}$ es una curva cerrada simple en el plano, que encierra un dominio D, entonces la integral $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} x\, dy$ calcula el área de D.

   (6 puntos)

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo para esta examen: 2 horas.

Nombre: ______________________ Código: ____________

1. Sea Ω el sólido comprendido entre la superficie $z = 4 - (x^2 + y^2)$ y el plano $z = 0$, cuya densidad de masa está dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$. Calcule la masa del sólido Ω.
   (6 puntos)

2. Queremos construir una caja cilíndrica (con piso y tapa) con volumen de $0{,}5\,m^3$ y debemos encontrar las medidas (para la altura h y el radio r) que hacen que la caja tenga mínima área superficial.
   i. Plantee el problema formulándolo como una optimización con restricciones en dos variables.
   ii. Resuelva el problema mediante el método de multiplicadores de Lagrange.

   (6 puntos)

3. Considere el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle 0, y, 0\rangle$ en $\mathbb{R}^3$.
   i. A partir de la definición de integral de superficie, calcule el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}$ a través del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, con respecto a la normal que apunta hacia arriba.
   ii. Enuncie el Teorema de la Divergencia y úselo para calcular la integral del enunciado anterior.

   (6 puntos)

4. Considere las superficies $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ y $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}$, ambas orientadas hacia arriba, y considere el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle y, -x, z\rangle$.
   i. Calcule $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}}$, el rotacional del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$.
   ii. Explique por qué $\displaystyle\iint_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S}$.
   iii. Calcule la integral indicada en el enunciado anterior.

   (6 puntos)

5. Reponda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.
   i. El campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2\rangle$ es un campo vectorial conservativo y $f(x, y, z) = x^3y^2z$ es un potencial para $\vec{\mathbf{F}}$.
   ii. Si Ω es un sólido en $\mathbb{R}^3$ que está contenido entre los planos $z = -1$ y $z = 1$, y el área de los cortes transversales de Ω (dados por los planos perpendiculares al eje z) viene dada por $A(z) = z^4 + z^2$, entonces el volumen Ω es $\dfrac{15}{16}$.
   iii. Si $\vec{\mathbf{F}}$ es un campo vectorial conservativo entonces $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{F}} = 0$.
   iv. Si $\mathbf{c}$ es una curva cerrada simple en el plano, que encierra un dominio D, entonces la integral $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} y\,dx$ calcula el área de D.

   (6 puntos)

Examen Final – Cálculo Vectorial

Solución

Tema A.

1. La integral (3 puntos)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-2r} r(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)\,dzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-2r} r^3\,dzdrd\theta = 2\pi\int_0^2 (4r^3-2r^4)dr$$

calcula la masa del sólido Ω, se obtiene $M = \frac{32\pi}{5}$ (3 puntos).

2. Sean r y h el radio y la altura del cilindro respectivamente medidas en metros. Dado que el volumen del cilindro esta fijo la siguinte ecuación se satisface

$$0.25 = \pi r^2 h.$$

Por otro lado el área superficial S de la caja esta dada por la suma del área de piso y techo con el área de la pared, es decir

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

De ahí:

(i) El problema de optimización que queremos resolver es (3 puntos):

$$\min 2\pi r^2 + 2\pi rh \text{ sujeto a } 0.25 = \pi r^2 h$$

(ii) Buscamos entonces los puntos críticos de Lagrange, resolviendo el sistema en (λ, r, h) dado por

$$\begin{aligned} 4\pi r + 2\pi h &= 2\pi rh\lambda \\ 2\pi r &= \pi r^2\lambda \\ 0.25 &= \pi r^2 h \end{aligned}$$

Si $r = 0$ la primera ecuacion implica que $h = 0$ lo cual es inconsistente con la tercera ecuación asi que podemos suponer que $r \neq 0$. De la segunda ecuación concluimos que $\lambda = 2/r$ (asi que $\lambda \neq 0$) y reemplazando en la primera concluimos que $h = 2r$. Reemplazando ambas ecuaciones en la restriccion concluimos que $0.25 = 2^3$ asi que $r = \sqrt[3]{\frac{1}{8\pi}} \simeq 0.341392$ metros (3 puntos).

3. (i.) Parametrizamos la superficie como el gráfico de una función, esto es

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u^2 - v^2, \end{cases}$$

con $u^2 + v^2 \leq 1$. Calculamos entonces

$$T_u \times T_v = 2u\mathbf{i} + 2v\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Por lo tanto, el flujo viene dado por (3 puntos)

$$\begin{aligned}
\int\int_{u^2+v^2\leq 1} u\mathbf{i}\cdot(2u\mathbf{i}+2v\mathbf{j}+\mathbf{k})\,dA &= \int\int_{u^2+v^2\leq 1} 2u^2\,dA \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(ii.) Por el Teorema de la Divergencia, la integral anterior es igual a (3 puntos)

$$\begin{aligned}
\int\int_{x^2+y^2\leq 1}\int_0^{1-x^2-y^2} dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\left(1-r^2\right)\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\,d\theta = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

4.

i. El rotacional del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ es (2 puntos)

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{F}} = \left|\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -yz & y & z \end{pmatrix}\right| = \langle 0,-y,z\rangle.$$

ii. Por el *teorema de Stokes*, dado que S es una superficie orientada, parametrizada como una gráfica cuya frontera es una curva cerrada c, y $\vec{\mathbf{F}}$ un campo vectorial C^1 definido sobre S,

$$\iint_S \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{S} = \int_c \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{s}.$$

Como en el caso de las superficies S_1 y S_2 ambas están orientadas hacia arriba y tienen como frontera común el círculo c de ecuación $x^2+y^2=9$ en el plano x-y, tenemos que (2 puntos)

$$\iint_{S_1} \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{S} = \int_c \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{s}.$$

iii. Podemos entonces calcular tal integral, según la ecuación anterior, usando la superficie S_2 (es la opción más fácil, ya que el vector normal unitario a la superficie $\vec{n}=\langle 0,0,1\rangle$ es constante) como (2 puntos)

$$\iint_{S_2} \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_2} 0\,dS = 0.$$

5.

i. Verdadero.

ii. Verdadero.

iii. Falso.

iv. Verdadero.

Tema B.

1. La integral (3 puntos)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2} r(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)\,dzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2} r^3\,dzdrd\theta = 2\pi\int_0^2 (4r^3 - r^5)dr$$

calcula la masa del sólido Ω, se obtiene $M = \frac{32\pi}{3}$ (3 puntos).

2. Sean r y h el radio y la altura del cilindro respectivamente medidas en metros. Dado que el volumen del cilindro esta fijo la siguiente ecuación se satisface

$$0.5 = \pi r^2 h.$$

Por otro lado el área superficial S de la caja esta dada por la suma del área de piso y techo con el área de la pared, es decir

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

De ahí:

(i) El problema de optimización que queremos resolver es (3 puntos):

$$\min 2\pi r^2 + 2\pi r h \text{ sujeto a } 0.5 = \pi r^2 h$$

(ii) Buscamos entonces los puntos críticos de Lagrange, resolviendo el sistema en (λ, r, h) dado por

$$\begin{aligned} 4\pi r + 2\pi h &= 2\pi r h\lambda \\ 2\pi r &= \pi r^2\lambda \\ 0.5 &= \pi r^2 h \end{aligned}$$

Si $r = 0$ la primera ecuacion implica que $h = 0$ lo cual es inconsistente con la tercera ecuación asi que podemos suponer que $r \neq 0$. De la segunda ecuación concluimos que $\lambda = 2/r$ (asi que $\lambda \neq 0$) y reemplazando en la primera concluimos que $h = 2r$. Reemplazando ambas ecuaciones en la restriccion concluimos que $0.5 = 2\pi r^3$ asi que $r = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}} \simeq 0.430127$ metros (3 puntos).

3. (i.) Parametrizamos la superficie como el gráfico de una función, esto es

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u^2 - v^2, \end{cases}$$

con $u^2 + v^2 \leq 1$. Calculamos entonces

$$T_u \times T_v = 2u\mathbf{i} + 2v\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Por lo tanto, el flujo viene dado por (3 puntos)

$$\begin{aligned} \int\int_{u^2+v^2\leq 1} v\mathbf{i}\cdot(2u\mathbf{i} + 2v\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dA &= \int\int_{u^2+v^2\leq 1} 2v^2\,dA \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\sin^2\theta\,dr\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(ii.) Por el Teorema de la Divergencia, la integral anterior es igual a (3 puntos)

$$\begin{aligned}\int\int_{x^2+y^2\leq 1}\int_0^{1-x^2-y^2} dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\left(1-r^2\right)\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\,d\theta = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

4.

i. El rotacional del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ es (2 puntos)

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{F}} = \left|\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -x & z \end{pmatrix}\right| = \langle 0,0,-2\rangle.$$

ii. Por el *teorema de Stokes*, dado que S es una superficie orientada, parametrizada como una gráfica cuya frontera es una curva cerrada c, y $\vec{\mathbf{F}}$ un campo vectorial C^1 definido sobre S,

$$\iint_S \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{S} = \int_c \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{s}.$$

Como en el caso de las superficies S_1 y S_2 ambas están orientadas hacia arriba y tienen como frontera común el círculo c de ecuación $x^2+y^2=9$ en el plano x-y, tenemos que (2 puntos)

$$\iint_{S_1} \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{S} = \int_c \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{s}.$$

iii. Podemos entonces calcular tal integral, según la ecuación anterior, usando la superficie S_2 (es la opción más fácil, ya que el vector normal unitario a la superficie $\vec{n}=\langle 0,0,1\rangle$ es constante) como (2 puntos)

$$\iint_{S_2} \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_2}(-2)\,dS = -2A(S_2) = -2\pi.$$

5.

i. Falso.

ii. Falso.

iii. Falso.

iv. Falso.