Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. **Tiempo máximo 1 hora y 50 minutos.**

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1. Considere la superficie S dada por

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta, \quad z = \theta,$$

para $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

   i. Encuentre la recta normal a la superficie en el punto $(0, 1, \frac{\pi}{2})$.
   ii. Encuentre el plano tangente a la superficie en el punto $(0, 1, \frac{\pi}{2})$.
   iii. Muestre que el área de la superficie se calcula con la integral $2\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2}\, dr$.
   iv. Calcule $\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S}$, para $\vec{\mathbf{F}}(x, y, x) = \langle x, y, z\rangle$, donde la orientación es la determinada por la normal con componente z positiva.

   (12 puntos)

2. Calcule la integral

$$\iint_D (x-y)\cos(x^2-y^2)\, dA,$$

donde la región D es el paralelogramo $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x-y \leq \pi,\ 0 \leq x+y \leq 1\right\}$. (6 puntos)

3. Halle la componente z del centro de masa del sólido homogéneo (de densidad constante) acotado por la superficie $x^2 + y^2 = z^2$ y los planos $z = 0$ y $z = 3$. (6 puntos)

4. Considere la función $f(x, y, z) = x + 3y - 2xy + z$.

   i. Calcule el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} f$.
   ii. Calcule $\int_\sigma \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s}$ donde σ es cualquier camino que va de $(0, 1, 0)$ a $(1, 0, 1)$ en $\mathbb{R}^3$.

   (6 puntos)

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. **Tiempo máximo** 1 **hora y** 50 **minutos.**

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1. Considere la superficie S dada por

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = \theta,$$

para $0 \le r \le 1$ y $0 \le \theta \le 2\pi$.

   i. Encuentre la recta normal a la superficie en el punto $(-1, 0, \pi)$.
   ii. Encuentre el plano tangente a la superficie en el punto $(-1, 0, \pi)$.
   iii. Muestre que el área de la superficie se calcula con la integral $2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\, dr$.
   iv. Calcule $\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S}$, para $\vec{\mathbf{F}}(x, y, x) = \langle x, y, z\rangle$, donde la orientación es la determinada por la normal con componente z negativa.

(12 puntos)

2. Calcule la integral

$$\iint_D (x + y)\,\mathrm{sen}\,(x^2 - y^2)\, dA,$$

donde la región D es el paralelogramo $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x - y \le \pi,\ 0 \le x + y \le 1\right\}$. (6 puntos)

3. Halle la componente z del centro de masa del sólido homogéneo (de densidad constante) acotado por la superficie $x^2 + y^2 = z$ y los planos $z = 0$ y $z = 3$. (6 puntos)

4. Considere la función $f(x, y, z) = 3x + y - 2xy + z$.

   i. Calcule el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} f$.
   ii. Calcule $\int_\sigma \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s}$ donde σ es cualquier camino que va de $(0, 1, 0)$ a $(1, 0, 1)$ en $\mathbb{R}^3$.

(6 puntos)

Parcial 2 – Cálculo Vectorial

Solución

1.

Tema A. Sea S la superficie dada por $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta)$, para $0 \le r \le 1$ y $0 \le \theta \le 2\pi$. Esta superficie es un helicoide y, parametrizado de esta forma, su plano tangente en cada punto está generado por los vectores $\vec{\mathbf{T}}_r = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0\rangle$ y $\vec{\mathbf{T}}_\theta = \langle -r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 1\rangle$. Dado que $\vec{\mathbf{T}}_r \times \vec{\mathbf{T}}_\theta = \langle \operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r\rangle$ tiene norma $\|\vec{\mathbf{T}}_r \times \vec{\mathbf{T}}_\theta\| = \sqrt{1+r^2} \neq 0$ para todo $0 \le r \le 1$ y $0 \le \theta \le 2\pi$, el helicoide es una superficie suave en todo punto.

i. El punto $(0,1,\frac{\pi}{2})$ está en S porque $\Phi(r=1,\theta=\frac{\pi}{2}) = (0,1,\frac{\pi}{2})$, así que la recta normal a la superficie en el punto dado tiene como vector director $\vec{\mathbf{T}}_r \times \vec{\mathbf{T}}_\theta|_{(1,\frac{\pi}{2})} = \langle 1,0,1\rangle$. La ecuación vectorial de tal recta es $\vec{\mathbf{x}} = \langle 0,1,\frac{\pi}{2}\rangle + t\langle 1,0,1\rangle$, para $t \in \mathbb{R}$.

ii. El plano tangente a la superficie en el punto $(0,1,\frac{\pi}{2})$ tiene como vector normal $\vec{\mathbf{T}}_r \times \vec{\mathbf{T}}_\theta|_{(1,\frac{\pi}{2})} = \langle 1,0,1\rangle$, así que la ecuación de tal plano está dada por $\langle x, y-1, z-\frac{\pi}{2}\rangle \cdot \langle 1,0,1\rangle = 0$, i.e. $x+z=\frac{\pi}{2}$.

iii. El área de una superficie parametrizada con $\Phi(r,\theta)$ se calcula con la integral de superficie $A(S) = \iint_D \|\vec{\mathbf{T}}_r \times \vec{\mathbf{T}}_\theta\|\,dr\,d\theta$, donde D denota el dominio de la parametrización. En este caso

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+r^2}\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^1 \sqrt{1+r^2}\,dr = \pi\left(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})\right).$$

iv. Por definición $\displaystyle\iint_S \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{\mathbf{F}}(\Phi(r,\theta))\cdot(\vec{\mathbf{T}}_r \times \vec{\mathbf{T}}_\theta)\,dr\,d\theta$, y dado que $\vec{\mathbf{F}}(\Phi(r,\theta)) = \langle r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta\rangle$ y $\vec{\mathbf{T}}_r \times \vec{\mathbf{T}}_\theta = \langle \operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r\rangle$ define el vector normal con componente z positiva,

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\theta\,dr\,d\theta = \pi^2.$$

Tema B. Sea S la superficie dada por $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta)$, para $0 \le r \le 1$ y $0 \le \theta \le 2\pi$. Esta superficie es un helicoide y, parametrizado de esta forma, su plano tangente en cada punto está generado por los vectores $\vec{\mathbf{T}}_r = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0\rangle$ y $\vec{\mathbf{T}}_\theta = \langle -r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 1\rangle$. Dado que $\vec{\mathbf{T}}_r \times \vec{\mathbf{T}}_\theta = \langle \operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r\rangle$ tiene norma $\|\vec{\mathbf{T}}_r \times \vec{\mathbf{T}}_\theta\| = \sqrt{1+r^2} \neq 0$ para todo $0 \le r \le 1$ y $0 \le \theta \le 2\pi$, el helicoide es una superficie suave en todo punto.

i. El punto $(-1,0,\pi)$ está en S porque $\Phi(r=1,\theta=\pi) = (-1,0,\pi)$, así que la recta normal a la superficie en el punto dado tiene como vector director $\vec{\mathbf{T}}_r \times \vec{\mathbf{T}}_\theta|_{(1,\pi)} = \langle 0,1,1\rangle$. La ecuación vectorial de tal recta es $\vec{\mathbf{x}} = \langle -1,0,\pi\rangle + t\langle 0,1,1\rangle$, para $t \in \mathbb{R}$.

ii. El plano tangente a la superficie en el punto $(-1,0,\pi)$ tiene como vector normal $\vec{\mathbf{T}}_r \times \vec{\mathbf{T}}_\theta|_{(1,\pi)} = \langle 0,1,1\rangle$, así que la ecuación de tal plano está dada por $\langle x+1, y, z-\pi\rangle \cdot \langle 0,1,1\rangle = 0$, i.e. $y+z=\pi$.

iii. El área de una superficie parametrizada con $\Phi(r,\theta)$ se calcula con la integral de superficie $A(S) = \iint_D \|\vec{\mathbf{T}}_r \times \vec{\mathbf{T}}_\theta\|\,dr\,d\theta$, donde D denota el dominio de la parametrización. En este caso

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+r^2}\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^1 \sqrt{1+r^2}\,dr = \pi\left(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})\right).$$

iv. Por definición $\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{\mathbf{F}}(\Phi(r,\theta)) \cdot (\vec{\mathbf{T}}_r \times \vec{\mathbf{T}}_\theta)\, dr\, d\theta$, y dado que $\vec{\mathbf{F}}(\Phi(r,\theta)) = \langle r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, \theta\rangle$ y $\vec{\mathbf{T}}_r \times \vec{\mathbf{T}}_\theta = \langle -\mathrm{sen}\,\theta, \cos\theta, -r\rangle$ define el vector normal con componente z negativa,

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = -\int_0^{2\pi} \int_0^1 r\theta\, dr\, d\theta = -\pi^2.$$

2.

Tema A. Para calcular la integral $\iint_D (x-y)\cos(x^2-y^2)\, dA$, donde la región D es el paralelogramo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x-y \leq \pi,\ 0 \leq x+y \leq 1\}$, hacemos el cambio de variable

$$u = x - y, \quad v = x + y,$$

cuyo Jacobiano es $|J| = \frac{1}{2}$, obteniendo como región de integración $0 \leq u \leq \pi,\ 0 \leq v \leq 1$. Así,

$$\iint_D (x-y)\cos(x^2-y^2)\, dA = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^\pi u\cos(uv)\, du\, dv = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(u)\, du = 1.$$

Tema B. Para calcular la integral $\iint_D (x+y)\,\mathrm{sen}\,(x^2-y^2)\, dA$, donde la región D es el paralelogramo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x-y \leq \pi,\ 0 \leq x+y \leq 1\}$, hacemos el cambio de variable

$$u = x - y, \quad v = x + y,$$

cuyo Jacobiano es $|J| = \frac{1}{2}$, obteniendo como región de integración $0 \leq u \leq \pi,\ 0 \leq v \leq 1$. Así,

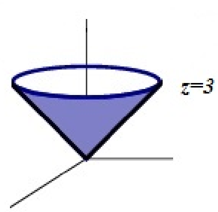
$$\iint_D (x+y)\,\mathrm{sen}\,(x^2-y^2)\, dA = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^\pi v\sin(uv)\, du\, dv = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos(\pi v))\, dv = \frac{1}{2}.$$

3.

Tema A. La componente z del centro de masa del sólido homogéneo (de densidad constante ρ) acotado por la superficie $x^2+y^2=z^2$ y los planos $z=0$ y $z=3$ es, por definición,

$$\bar{z} = \frac{\iiint_R z\rho\, dV}{\iiint_R \rho\, dV},$$

donde R es la región sólida interior al cono (ver figura) entre $z=0$ y $z=3$.



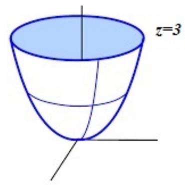
Como $x^2+y^2=r^2=z^2$, en coordenadas cilíndricas tal región se describe como $0 \leq r \leq z$, $0 \leq z \leq 3$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, así que

$$\bar{z} = \frac{\iiint_R z\rho\, dV}{\iiint_R \rho\, dV} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^z rz\, dr\, dz\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^z r\, dr\, dz\, d\theta} = \frac{9}{4}.$$

TEMA B. La componente z del centro de masa del sólido homogéneo (de densidad constante ρ) acotado por la superficie $x^2+y^2=z$ y los planos $z=0$ y $z=3$ es, por definición,

$$\bar{z} = \frac{\iiint_R z\rho\, dV}{\iiint_R \rho\, dV},$$

donde R es la región sólida interior al paraboloide (ver figura) entre $z=0$ y $z=3$.



Como $x^2+y^2=r^2=z$, en coordenadas cilíndricas tal región se describe como $0 \le r \le \sqrt{z}$, $0 \le z \le 3$ y $0 \le \theta \le 2\pi$, así que

$$\bar{z} = \frac{\iiint_R z\rho\, dV}{\iiint_R \rho\, dV} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{\sqrt{z}} rz\, dr\, dz\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{\sqrt{z}} r\, dr\, dz\, d\theta} = 2.$$

4. TEMA A. Considere la función $f(x,y,z) = x+3y-2xy+z$.

i. El gradiente de f es el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} f = \langle 1-2y, 3-2x, 1\rangle$.

ii. Para calcular $\int_\sigma \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s}$ donde σ es cualquier camino que va de $(0,1,0)$ a $(1,0,1)$ en $\mathbb{R}^3$, usamos el Teorema Fundamental de las integrales de línea:

$$\int_\sigma \vec{\nabla} f \cdot d\vec{s} = f(x,y,z)\big|_{(0,1,0)}^{(1,0,1)} = f(1,0,1) - f(0,1,0) = -1.$$

TEMA B. Considere la función $f(x,y,z) = 3x+y-2xy+z$.

i. El gradiente de f es el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} f = \langle 3-2y, 1-2x, 1\rangle$.

ii. Para calcular $\int_\sigma \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s}$ donde σ es cualquier camino que va de $(0,1,0)$ a $(1,0,1)$ en $\mathbb{R}^3$, usamos el Teorema Fundamental de las integrales de línea:

$$\int_\sigma \vec{\nabla} f \cdot d\vec{s} = f(x,y,z)\big|_{(0,1,0)}^{(1,0,1)} = f(1,0,1) - f(0,1,0) = 3.$$