Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. Firme y entregue el enunciado junto a la hoja de examen. **Tiempo máximo** 1 **hora y** 50 **minutos.**

Nombre: ______________________ Código: ______________

1. Considere la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   i. Calcule, si es que existe, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.
   ii. Diga si f es continua en $(0,0)$. Explique.
   iii. Halle $\vec{\nabla} f(1,0)$.

   (6 puntos)

2. Considere la curva en el plano $\mathbf{c}(t) = \langle 2\cos t, \operatorname{sen} t\rangle$ y sea $f(x,y)$ una función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

   i. Calcule $\mathbf{c}(\frac{\pi}{4})$ y encuentre el vector tangente a la curva $\mathbf{c}(t)$ en ese punto.
   ii. Si $\vec{\nabla} f(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \langle \sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle$, encuentre la derivada de la función compuesta $f(\mathbf{c}(t))$ cuando $t = \frac{\pi}{4}$.

   (6 puntos)

3. Considere la superficie en $\mathbb{R}^3$ dada por la ecuación $z = x^2 + y^2$.

   i. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(1,0,1)$.
   ii. Encuentre la recta normal a la superficie en el punto $(1,0,1)$.
   iii. Demuestre que la recta normal a la superficie en el punto $(1,0,1)$ intersecta a la superficie en otro punto, encuentre las coordenadas de ese punto.

   (6 puntos)

4. i. Encuentre el punto sobre la elipse $x^2 + 6y^2 + 3xy = 40$ para el cual el valor de la coordenada y es máximo.
   ii. La función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$ tiene cuatro puntos críticos: $(3,0), (3,2), (-1,0)$ y $(-1,2)$. Diga cuáles de ellos son *extremos* (máximos o mínimos locales) de f.

   (6 puntos)

5. Considere el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle x^2 + yz, 3y, xy + z\rangle$.

   i. Calcule la divergencia de $\vec{\mathbf{F}}$.
   ii. Calcule el rotacional de $\vec{\mathbf{F}}$.
   iii. Diga si el campo $\vec{\mathbf{F}}$ es un rotacional (i.e. si $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{G}}$ para algún campo vectorial $\vec{\mathbf{G}}$).

   (6 puntos)

> Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. Firme y entregue el enunciado junto a la hoja de examen. **Tiempo máximo** 1 **hora y** 50 **minutos.**

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1. Considere la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

   i. Calcule, si es que existe, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.
   ii. Diga si f es continua en $(0,0)$. Explique.
   iii. Halle $\vec{\nabla} f(\sqrt{\pi},0)$.

   (6 puntos)

2. Considere la curva en el plano $\mathbf{c}(t)=\langle \cos t, 2\operatorname{sen} t\rangle$ y sea $f(x,y)$ una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.
   i. Calcule $\mathbf{c}(\frac{\pi}{4})$ y encuentre el vector tangente a la curva $\mathbf{c}(t)$ en ese punto.
   ii. Si $\vec{\nabla} f(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})=\langle\sqrt{2},\sqrt{2}\rangle$, encuentre la derivada de la función compuesta $f(\mathbf{c}(t))$ cuando $t=\frac{\pi}{4}$.

   (6 puntos)

3. Considere la superficie en $\mathbb{R}^3$ dada por la ecuación $z=x^2+y^2$.
   i. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(0,1,1)$.
   ii. Encuentre la recta normal a la superficie en el punto $(0,1,1)$.
   iii. Demuestre que la recta normal a la superficie en el punto $(0,1,1)$ intersecta a la superficie en otro punto, encuentre las coordenadas de ese punto.

   (6 puntos)

4. i. Encuentre el punto sobre la elipse $x^2+6y^2+3xy=40$ para el cual el valor de la coordenada x es máximo.
   ii. La función $f(x,y)=x^3+y^3-3x^2-3y^2-9x$ tiene cuatro puntos críticos: $(3,0),(3,2),(-1,0)$ y $(-1,2)$. Diga cuáles de ellos son *puntos de silla* de f.

   (6 puntos)

5. Considere el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}=\langle x^2+yz, z^3-xy, 3z\rangle$.
   i. Calcule la divergencia de $\vec{\mathbf{F}}$.
   ii. Calcule el rotacional de $\vec{\mathbf{F}}$.
   iii. Diga si el campo $\vec{\mathbf{F}}$ es un rotacional (i.e. si $\vec{\mathbf{F}}=\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{G}}$ para algún campo vectorial $\vec{\mathbf{G}}$).

   (6 puntos)

Parcial 1 – Cálculo Vectorial

Solución

1.

Tema A. Considere la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

i.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}=\lim_{r\to 0} e^{-\frac{1}{r^2}}=\lim_{r\to 0}\frac{1}{e^{\frac{1}{r^2}}}=0.$$

ii. La función $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$ si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$ luego, por la definición de la función y el cálculo anterior, f es continua en $(0,0)$.

iii. Finalmente, por definición

$$\vec{\nabla} f(1,0)=\langle \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,0)}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,0)}\rangle=\langle \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\Big|_{(1,0)}, \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\Big|_{(1,0)}\rangle=\langle -\frac{2}{e},0\rangle.$$

Tema B. Considere la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

i.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{\operatorname{sen}(r^2)}{r^2}=1.$$

ii. La función $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$ si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$ luego, por la definición de la función y el cálculo anterior, f es continua en $(0,0)$.

iii. Finalmente, por definición

$$\vec{\nabla} f(\sqrt{\pi},0)=\langle \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(\sqrt{\pi},0)}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(\sqrt{\pi},0)}\rangle=$$

$$\langle \frac{2x(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)-2x\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\Big|_{(\sqrt{\pi},0)}, \frac{2y(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)-2y\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\Big|_{(\sqrt{\pi},0)}\rangle=\langle -\frac{2}{\sqrt{\pi}},0\rangle.$$

2.

TEMA A. Considere la curva en el plano $\mathbf{c}(t) = \langle 2\cos t, \operatorname{sen} t\rangle$ y sea $f(x, y)$ una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

i. Remplazando el parámetro en la curva obtenemos $\mathbf{c}(\frac{\pi}{4}) = \langle \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$ y, derivando, encontramos que el vector tangente a la curva en ese punto es $\mathbf{c}'(\frac{\pi}{4}) = \langle -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$.

ii. Si $\vec{\nabla} f(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \langle \sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle$, independientemente de quien sea f, para encontrar la derivada de la función compuesta $f(\mathbf{c}(t))$ cuando $t = \frac{\pi}{4}$ usamos la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t))\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \vec{\nabla} f(\mathbf{c}(\frac{\pi}{4})) \cdot \mathbf{c}'(\frac{\pi}{4}) = \langle \sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle \cdot \langle -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle = -2 + 1 = -1.$$

TEMA B. Considere la curva en el plano $\mathbf{c}(t) = \langle \cos t, 2\operatorname{sen} t\rangle$ y sea $f(x, y)$ una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

i. Remplazando el parámetro en la curva obtenemos $\mathbf{c}(\frac{\pi}{4}) = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\rangle$ y, derivando, encontramos que el vector tangente a la curva en ese punto es $\mathbf{c}'(\frac{\pi}{4}) = \langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\rangle$.

ii. Si $\vec{\nabla} f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}) = \langle \sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle$, independientemente de quien sea f, para encontrar la derivada de la función compuesta $f(\mathbf{c}(t))$ cuando $t = \frac{\pi}{4}$ usamos la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t))\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \vec{\nabla} f(\mathbf{c}(\frac{\pi}{4})) \cdot \mathbf{c}'(\frac{\pi}{4}) = \langle \sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle \cdot \langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\rangle = -1 + 2 = 1.$$

3.

TEMA A. Considere la superficie en $\mathbb{R}^3$ dada por la ecuación $z = x^2 + y^2$.

i. La ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $\vec{x}_o = (1, 0, 1)$ se puede encontrar a partir del gradiente de la función $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$. La ecuación del plano es $\vec{\nabla} F(\vec{x}_o) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_o) = 0$, como $\vec{\nabla} F = \langle -2x, -2y, 1\rangle$ tenemos

$$(-2)(x - 1) + (0)(y - 0) + (1)(z - 1) = 0,$$

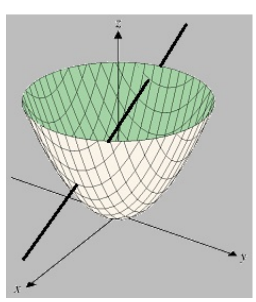
así que la ecuación del plano tangente es $2x - z = 1$.

ii. La recta normal a la superficie en el punto $\vec{x}_o = (1, 0, 1)$ tiene como vector director a $\vec{\nabla} F(1, 0, 1) = \langle -2, 0, 1\rangle$, luego la ecuación vectorial de tal recta es $\langle x(t), y(t), z(t)\rangle = \langle 1, 0, 1\rangle + t\langle -2, 0, 1\rangle = \langle 1 - 2t, 0, 1 + t\rangle$, con $t \in \mathbb{R}$.

iii. Como las componentes de la recta normal a la superficie en el punto $(1, 0, 1)$ son $x(t) = 1-2t$, $y(t) = 0$ y $z(t) = 1 + t$, y deben satisfacer en los puntos de intersección con la superficie la ecuación $z = x^2 + y^2$, tenemos que

$$1 + t = (1 - 2t)^2 = 1 - 4t + 4t^2,$$

es decir que $4t^2 - 5t = t(4t - 5) = 0$ y la recta intersecta a la superficie en $t = 0$ (i.e. en el punto dado) y en otro punto, para el cual $t = \frac{5}{4}$, cuyas coordenadas son $(-\frac{3}{2}, 0, \frac{9}{4})$.



TEMA B. Considere la superficie en $\mathbb{R}^3$ dada por la ecuación $z = x^2 + y^2$.

i. La ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $\vec{x}_o = (0, 1, 1)$ se puede encontrar a partir del gradiente de la función $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$. La ecuación del plano es $\vec{\nabla}F(\vec{x}_o) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_o) = 0$, como $\vec{\nabla}F = \langle -2x, -2y, 1\rangle$ tenemos

$$(0)(x - 0) + (-2)(y - 1) + (1)(z - 1) = 0,$$

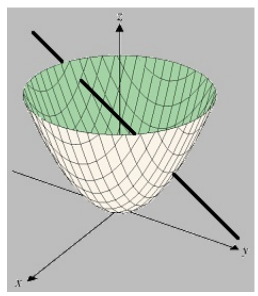
así que la ecuación del plano tangente es $2y - z = 1$.

ii. La recta normal a la superficie en el punto $\vec{x}_o = (0, 1, 1)$ tiene como vector director a $\vec{\nabla}F(0, 1, 1) = \langle 0, -2, 1\rangle$, luego la ecuación vectorial de tal recta es $\langle x(t), y(t), z(t)\rangle = \langle 0, 1, 1\rangle + t\langle 0, -2, 1\rangle = \langle 0, 1 - 2t, 1 + t\rangle$, con $t \in \mathbb{R}$.

iii. Como las componentes de la recta normal a la superficie en el punto $(0, 1, 1)$ son $x(t) = 0$, $y(t) = 1 - 2t$ y $z(t) = 1 + t$, y deben satisfacer en los puntos de intersección con la superficie la ecuación $z = x^2 + y^2$, tenemos que

$$1 + t = (1 - 2t)^2 = 1 - 4t + 4t^2,$$

es decir que $4t^2 - 5t = t(4t - 5) = 0$ y la recta intersecta a la superficie en $t = 0$ (i.e. en el punto dado) y en otro punto, para el cual $t = \frac{5}{4}$, cuyas coordenadas son $(0, -\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$.



4. TEMA A.

i. El punto sobre la elipse $x^2 + 6y^2 + 3xy = 40$ para el cual el valor de la coordenada y es máximo se puede encontrar usando la ecuación de la elipse como restricción y maximizando $f(x, y) = y$ con multiplicadores de Lagrange:

$$\langle 0, 1\rangle = \lambda\langle 2x + 3y, 12y + 3x\rangle,$$

y, como $1 = \lambda(12y + 3x)$ implica que $\lambda \neq 0$, tendremos de $0 = \lambda(2x + 3y)$ que $2x = -3y$, luego (remplazando en la restricción) el punto que tiene mayor coordenada y sobre la elipse resulta ser $(-\sqrt{24}, \sqrt{\frac{32}{3}})$.

ii. La función $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$ tiene cuatro puntos críticos: $(3, 0), (3, 2), (-1, 0)$ y $(-1, 2)$. Para clasificarlos calculamos

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 6x - 6 & 0 \\ 0 & 6y - 6 \end{pmatrix} = 36xy - 36x - 36y + 36.$$

En $(3, 2)$ y $(-1, 0)$ este determinante es positivo, luego estos dos puntos son *extremos* (máximos o mínimos locales) de f (de hecho, hay un máximo y un mínimo).

Tema B.

i. El punto sobre la elipse $x^2 + 6y^2 + 3xy = 40$ para el cual el valor de la coordenada x es máximo se puede encontrar usando la ecuación de la elipse como restricción y maximizando $f(x,y) = x$ con multiplicadores de Lagrange:

$$\langle 1, 0\rangle = \lambda\langle 2x + 3y, 12y + 3x\rangle,$$

y, como $1 = \lambda(2x + 3y)$ implica que $\lambda \neq 0$, tendremos de $0 = \lambda(12y + 3x)$ que $3x = -12y$, luego (remplazando en la restricción) el punto que tiene mayor coordenada y sobre la elipse resulta ser $(8, -2)$.

ii. La función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$ tiene cuatro puntos críticos: $(3,0), (3,2), (-1,0)$ y $(-1,2)$. Para clasificarlos calculamos

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 6x - 6 & 0 \\ 0 & 6y - 6 \end{pmatrix} = 36xy - 36x - 36y + 36.$$

En $(3,0)$ y $(-1,2)$ este determinante es negativo, luego estos dos puntos son *puntos de silla.*

5. Tema A. Considere el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle x^2 + yz, 3y, xy + z\rangle$.

i. La divergencia de $\vec{\mathbf{F}}$ es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + yz) + \frac{\partial}{\partial y}(3y) + \frac{\partial}{\partial z}(xy + z) = 2x + 4.$$

ii. El rotacional de $\vec{\mathbf{F}}$ es

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} = \langle x, 0, -z\rangle.$$

iii. El campo $\vec{\mathbf{F}}$ *no* es un rotacional porque su divergencia es diferente de cero.

Tema B. Considere el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle x^2 + yz, z^3 - xy, 3z\rangle$.

i. La divergencia de $\vec{\mathbf{F}}$ es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + yz) + \frac{\partial}{\partial y}(z^3 - xy) + \frac{\partial}{\partial z}(3z) = x + 3.$$

ii. El rotacional de $\vec{\mathbf{F}}$ es

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} = \langle -3z^2, y, -y - z\rangle.$$

iii. El campo $\vec{\mathbf{F}}$ *no* es un rotacional porque su divergencia es diferente de cero.